Simone Guggiari

Inhaltsverzeichnis

1 Vollständige Induktion 1

2 Mengen 1
- 2.1 Definitionen . . . 1
- 2.2 Rechenregeln . . . 1
- 2.3 Beweise . . . 1
- 2.4 bekannte Mengen . . . 1
- 2.5 Teilmengen von $\mathbb{R}$ . . . 1
  - 2.5.1 Intervalle . . . 1
  - 2.5.2 Beschränktheit . . . 1
  - 2.5.3 Supremum / Infimum . . . 1
  - 2.5.4 Archimedisches Prinzip . 2
- 2.6 Mächtigkeit . . . 2
  - 2.6.1 Abzählbar . . . 2
  - 2.6.2 Gleichmächtigkeit zeigen . 2
  - 2.6.3 weitere gleichmächtige Mengen . . . 2

3 Funktionen 2
- 3.1 Regeln . . . 2
- 3.2 Monotonie . . . 2
  - 3.2.1 Monotonie und Differenzial (Ableitung) . . . 2
- 3.3 Identität (identische Abbildung, id_X) . . . 2
- 3.4 Injektiv, surjektiv, bijektiv . . . 2
  - 3.4.1 Injektiv . . . 2
  - 3.4.2 Surjektiv . . . 3
  - 3.4.3 Bijektiv . . . 3

4 Zwischenwertsatz 3
- 4.1 Beispiel (Fixpunkt) . . . 3

5 Folgen in $\mathbb{R}$ 3
- 5.1 Definitionen . . . 3
- 5.2 Rechnen mit Eigenschaften . . . 3
- 5.3 Rechnen mit Grenzwerten . . . 3
- 5.4 Hilfsmittel . . . 3
- 5.5 Konvergenzkriterien . . . 3
- 5.6 Tipps & Beispiele . . . 4
  - 5.6.1 Brüche . . . 4
  - 5.6.2 l'Hospital für Folgen (Folge als Funktion) . . . 4
  - 5.6.3 Wurzeln . . . 4
  - 5.6.4 Laufvariable im Exponent 4
  - 5.6.5 Gruppieren . . . 4
- 5.7 Cauchy-Folgen . . . 4

6 Reihen 4
- 6.1 Definitionen . . . 4
- 6.2 Rechenregeln Reihen . . . 4
- 6.3 Konvergenzkriterien . . . 4
  - 6.3.1 Reihen Kriterien . . . 4
- 6.4 Potenzreihe . . . 5
  - 6.4.1 Konvergenzradius . . . 5

7 Taylorreihe / -entwicklung 5
- 7.1 Rechenregeln . . . 5
  - 7.1.1 Addition . . . 5
  - 7.1.2 Multiplikation . . . 5
  - 7.1.3 Kettenregel . . . 5
  - 7.1.4 Bemerkungen / Eigenschaften / Konvergenz . . 5

8 Stetigkeit und Limes einer Funktion 5
- 8.1 (Punktweise) Stetigkeit . . . 5
- 8.2 Gleichmässige Stetigkeit . . . 5
- 8.3 Lipschitz-Stetigkeit . . . 6
- 8.4 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit . . . 6
- 8.5 Abhängigkeit der Stetigkeitsbegriffe . . . 6
- 8.6 Regel von de l'Hospital . . . 6
- 8.7 Tips zur Stetigkeit . . . 6

9 Stetigkeit von Funktionen mit mehreren Variabeln 6
- 9.1 Typische Fälle . . . 6

10 Funktionsfolgen 6
- 10.1 Definition . . . 6

11 Differenzierbarkeit 6
- 11.1 Definition . . . 6
- 11.2 Mittelwertsatz (Satz von Lagrange) 6
  - 11.2.1 Beispiel: Ungleichungen . 6
- 11.3 Monotonie . . . 7
- 11.4 Konvexität . . . 7
  - 11.4.1 Extremstellen . . . 7
  - 11.4.2 Beispiel Wendepunkt berechnen . . . 7
- 11.5 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . 7
- 11.6 Umkehrsatz . . . 7
- 11.7 Monotonie, Bijektion, Differenzierbarkeit . . . 7

12 Partialbruchzerlegung 7

13 Integralrechnung 7
- 13.1 Berechnung . . . 7
  - 13.1.1 Substitutionsregel . . . 7
  - 13.1.2 Integrale mit Parametern 8
  - 13.1.3 Beispiel: einfaches Integral 8
  - 13.1.4 Beispiel: Substitution . . 8

14 Riemannsummen (Riemannintegral) 8
- 14.1 Riemansumme . . . 8
- 14.2 Riemann Integrabel . . . 8

15 Differentialgleichung (DGL) 9
- 15.1 Lineare DGL 1. Ordnung ($y' + f(x) \cdot y = g(x)$) . . . 9
  - 15.1.1 Variation der Konstanten 9
  - 15.1.2 genereller Ansatz . . . 9
  - 15.1.3 Beispiel mit Variation der Konstanten . . . 9
  - 15.1.4 Beispiel genereller Ansatz 10
  - 15.1.5 Beispiel Direkterer Lösungsweg . . . 10
- 15.2 Lineare DGL höherer Ordnung . 10
- 15.3 Ansätze für partikuläre Lösung . 11

16 Kurvenintegral (Linienintegral) 11
- 16.1 2. Art . . . 11
- 16.2 1. Art . . . 11
- 16.3 Parametrisierung von Kurven . . 12
  - 16.3.1 Beispiel: Kurvenintegral mit zwei Grenzgraphen . 12
- 16.4 Berechnung . . . 12
- 16.5 Bogenlänge . . . 12

17 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$ 12
- 17.1 Norm . . . 12
- 17.2 Partielle Differenzierbarkeit . . . 12

18 Vektoranalysis 12
- 18.1 Bestimmung eines Potentials im $\mathbb{R}^2$ . . . 13
- 18.2 Bestimmung eines Potentials im $\mathbb{R}^3$ . . . 13
- 18.3 Geometrisches Verständniss . . . 13

19 Formeltafel 14
- 19.1 Mitternachtsformel . . . 14
- 19.2 Binomialkoeffizient . . . 14
- 19.3 Argument . . . 14
- 19.4 Kreisfunktionen . . . 14
  - 19.4.1 Einheitskreis . . . 14
- 19.5 Trigonometrische Funktionen & Additionstheorem . . . 14
- 19.6 Hyperbelfunktionen . . . 14
- 19.7 Ableitungen . . . 14
  - 19.7.1 Regeln . . . 14
  - 19.7.2 Ableitungs-Tafel . . . 14
- 19.8 Integrale . . . 15
  - 19.8.1 Integralregeln . . . 15
  - 19.8.2 typische Integrale . . . 15
  - 19.8.3 trionometrische Funktionen 15
  - 19.8.4 Hyperbelfunktionen . . . 15
  - 19.8.5 Exponentialfunktion . . . 15
- 19.9 Reihenentwicklung . . . 15
- 19.10 Grenzwerte . . . 15
- 19.11 Reihen . . . 15
- 19.12 Linienintegral . . . 16
- 19.13 Kreuzprodukt . . . 16
- 19.14 Exponent . . . 16
- 19.15 Wurzel . . . 16
- 19.16 Ungleichungen . . . 16
- 19.17 Logarithmen . . . 16
- 19.18 Exponentialfunktion . . . 16
- 19.19 Komplexe Zahlen . . . 16
- 19.20 Geometrische Körper . . . 16
  - 19.20.1 Ellipsoid . . . 16
- 19.21 Geometrie in 3D . . . 16
- 19.22 Ausklammern . . . 16
- 19.23 Aus Serien . . . 16
- 19.24 $\log(x)$ . . . 17
- 19.25 $\frac{1}{x}$ . . . 17
- 19.26 $\sqrt{x}$ . . . 17
- 19.27 e^x . . . 17
- 19.28 Funktionsmanipulation . . . 17
- 19.29 Pascalsches Dreieck . . . 17

20 Reihen Tabellen 18

1 Vollständige Induktion

Grundlägende Struktur um die Aussage $A(n)$ zu beweisen:

1. **Induktionsanfang/Verankerung:** Die Aussage wird für $n = A$ bewiesen. A ist dabei meistens der erste Wert für die gegebene Eingabemenge. Der Beweis wird meist durch direktes ausrechnen gemacht.
2. **Annahme/Induktionsvoraussetzung:** Hier schreibt man, dass man davon ausgeht die Aussage sei gültig (damit man sie im nächsten Schritt) einsetzen kann. Man kopiert also im Grunde, was man zu beweisen hat mit einigen Zierwörter.
3. **Induktionsschritt:** Für jedes $n \geq A$ wird unter Benutzung der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ bewiesen. Dazu wird die Induktionsannahme verwendet.

Beispiel 1

Es ist zu beweisen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

1. **Verankerung:** Für $n = 1$ gilt $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✓
2. **Annahme:** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$
3. **Induktionsschritt:**

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &\overset{\text{Annahme}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

□

Beispiel 2

Beispiel: Summe der natürlichen Zahlen

$$sum(0) = 0 \tag{1}$$
$$sum(n+1) = sum(n) + (n+1) \tag{2}$$

Lemma: $\forall \in \mathbb{N}.sum(n) = n * (n+1)/2$
Beweis:
Sei $P(n) \equiv sum(n) = n * (n+1)/2$.
Wir zeigen $\forall \in \mathbb{N}.P(n)$ mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Zeige $P(0)$.

$$sum(0) = \tag{3}$$
$$= 0 \qquad \text{- (1)} \tag{4}$$
$$= 0 * (0+1)/2 \qquad \text{– arith} \tag{5}$$

Induktionsschritt:
Sei $n \in N$ beliebig und nehmen wir $P(n)$ an (Induktionsvoraussetzung).
Zeige $P(n+1)$ (Induktionsbehauptung).

$$sum(n+1) = \tag{6}$$
$$= sum(n) + (n+1) \text{— (2)} \tag{7}$$
$$= n * (n+1)/2 + (n+1) \text{ — P(n) Induktionsvor.} \tag{8}$$
$$= n * (n+1)/2 + (2 * (n+1))/2 \text{—arith} \tag{9}$$
$$= (n+1) * ((n+1)+1)/2 \text{—arith} \tag{10}$$

qed.

2 Mengen

2.1 Definitionen

Teilmenge: $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \rightarrow x \in B$
Vereinigung: $A \cup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$
Durchschnitt: $A \cap B := \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
Differenz: $A \backslash B = A - B := \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
Komplement: $A^c = \overline{A} := \{x | x \notin A\}$

2.2 Rechenregeln

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
$(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \cap (B^c \cup C)$	$(A \backslash B) \cap C = A \backslash (B \cup C^c)$
$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$	$A \backslash B = A \cap B^c$

2.3 Beweise

Um Mengengleichungen zu beweisen überführt man üblicherweise eine Seite in eine Form, die nur noch aus logischen Operatoren besteht $(\wedge, \vee, \in, \notin)$ und formt dann so um, dass man zur gewünschten anderen Seite kommt durch Rückführung in eine Form mit Mengenoperatoren. Dazu verwendet man am einfachsten die Definitionen weiter oben.

Beispiel

Zu Zeigen: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ wobei A, B, C Untermengen von X sind.

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= \{x \in X : x \notin (A \cup B)\} = \{x \in X : x \notin A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in X : x \notin A\} \cap \{x \in X : x \notin B\} = A^c \cap B^c \end{aligned}$$

2.4 bekannte Mengen

$\mathbb{N}$, natürliche Zahlen: $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$, ganze Zahlen: $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$, rationale Zahlen: $\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$
$\mathbb{R}$, reelle Zahlen: "alle" Zahlen, die wir im Alltag brauchen.
Genauer: rationale Zahlen und die irrationalen Zahlen.

2.5 Teilmengen von $\mathbb{R}$

2.5.1 Intervalle

Schreibweise	Definition	Bezeichnung
$]a, b[, (a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \| a < x < b\}$	offen
$[a, b[, [a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \| a \leq x < b\}$	(rechts) halboffen
$]a, b], (a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \| a < x \leq b\}$	(links) halboffen
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \| a \leq x \leq b\}$	abgeschlossen

Achtung: Ist a oder b "unendlich" $(\pm\infty)$, so muss es auf der entsprechenden Seite offen sein: z.B. $[a, \infty[$, $]-\infty, b[$. Unendlich ist keine konkrete Zahl und kann somit nicht gleich einer anderen Zahl sein, was nötig wäre für $\leq$.
In der Topologie sind reelle Intervalle Beispiele für zusammenhängende Mengen. Offene Intervalle sind offene Mengen und abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossene Mengen. Halboffene Mengen sind weder offen noch abgeschlossen. Abgeschlossene beschränkte Intervalle sind kompakt.

2.5.2 Beschränktheit

Die Menge M sei eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ $(M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset)$.

Die Menge M ist beschränkt, wenn $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass gilt: $\forall x \in M : C_1 \leq x \leq C_2$. Äquivalent dazu ist die Aussage: $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in M : |x| \leq C$

Die Menge M ist nach oben beschränkt, wenn C existiert, sodass gilt: $\forall x \in M : x \leq C$. *Nach unten beschränkt* ist entsprechend: $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in M : C \leq x$.

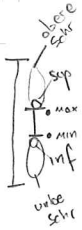
2.5.3 Supremum / Infinum

Ist $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so nennt man jedes C mit $x \leq C, \forall x \in M$ eine obere Schranke von M. Die kleinste obere Schranke (existiert immer in $\mathbb{R}$) nennt man Supremum von M ($\sup M$).

Analog dazu wird die untere Schranke und das Infinum ($\inf M$) definiert.

Falls die Menge M ein grösstes (bzw. kleinstes) Element besitzt, so nennt man es Maximum (bzw. Minimum). Es gilt:

- Ist $M \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und beschränkt, so existieren Minimum und Maximum von M
- Wenn $\max M$ existiert, dann ist $\sup M = \max M$
- Ist $\sup M \in M$, so ist $\max M = \sup M$
- Wenn $\min M$ existiert, dann ist $\inf M = \min M$
- Ist $\inf M \in M$, so ist $\min M = \inf M$



2.5.3.1 mathematische Definition

$\sup M = a$ gilt genau dann, wenn

- $\forall x \in M : x \leq a$, a ist somit obere Schranke von M
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x > a - \varepsilon$, d.h. $a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke mehr, egal wie klein man ε auch wählt $\rightarrow a$ ist kleinste obere Schranke.

$\inf M = a$ gilt genau dann, wenn

- $\forall x \in M : x \geq a$, a ist somit untere Schranke von M
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : x < a + \varepsilon$, d.h. $a + \varepsilon$ ist keine untere Schranke mehr, egal wie klein man ε auch wählt $\rightarrow a$ ist grösste untere Schranke.

2.5.4 Archimedisches Prinzip

Satz 2.1 (Archimedisches Prinzip V. 1)**.** Zu jeder Zahl $0 < b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b < n$

(esiste sempre n° più grande)

oder

Satz 2.2 (Archimedisches Prinzip V. 2)**.** Zu den zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R},\ y > x > 0$ existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $nx > y$

Geometrisch: Hat man zwei Strecken auf einer Geraden, so kann man die grössere von beiden übertreffen, wenn man die kleinere nur oft genug abträgt.

2.6 Mächtigkeit

potente (stesso cardinalità)

Eine Menge A ist gleichmächtig zu einer Menge B, wenn es eine *Bijektion* $f : A \rightarrow B$ gibt. Man schreibt dann $|A| = |B|$.

Hat man zwischen zwei Mengen eine Funktion $f : A \rightarrow B$ gefunden, die bijektiv ist, so gibt es eine Umkehrfunktion, die ebenfalls Bijektiv ist. Diese bildet jedes Element von B auf eines aus A ab.

2.6.1 Abzählbar

Eine Menge A ist abzählbar, wenn sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen) ist. (oder eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist)

2.6.2 Gleichmächtigkeit zeigen

Zeigt man durch angeben einer bijektiven Funktion.

2.6.2.1 Beispiel

Zu zeigen: $U := \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

Beweis: Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow U$ gegeben durch

$$f(n) = \begin{cases} n & n \text{ ungerade} \\ -n - 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Diese Funktion ist offensichtlich bijektiv (sonst Umkehrfunktion angeben), wodurch U gleichmächtig $\mathbb{N}$ ist.

2.6.3 weitere gleichmächtige Mengen

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind gleichmächtig (numerabili, abzählbar)
- $\mathbb{R},]0, 1[$ sind gleichmächtig (non numerabile)
- $\mathbb{R}$ ist mächtiger ("überabzählbar") als $\mathbb{N}$

3 Funktionen

non num, regolare

Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ ist eine Vorschrift, nach der jedem Element aus D ein Element aus W zugeordnet wird. D ist der Definitionsbereich (Bereich der gültigen Eingaben) und W der Wertebereich (Bereich der gültigen Ausgaben).

Ist $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$, so ist die Funktion $g \circ f : M \rightarrow P$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, eine Komposition von f und g.

3.1 Regeln

- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3.2 Monotonie

Die Funktion f ist...

monoton steigend, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \leq f(x_2)$ folgt

streng monoton steigend, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) < f(x_2)$ folgt

monoton fallend, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) \geq f(x_2)$ folgt

streng monoton fallend, falls aus $x_1 < x_2$ immer $f(x_1) > f(x_2)$ folgt

3.2.1 Monotonie und Differenzial (Ableitung)

Ist f auf dem Intervall I differenzierbar, so gilt

- $f'(x) > 0\ \forall x \in I \Rightarrow f$ streng monoton steigend
- $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton steigend
- $f'(x) < 0\ \forall x \in I \Rightarrow f$ streng monoton fallend
- $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton fallend

3.3 Identität (identische Abbildung, id_X)

Sei M eine Menge, dann ist die *identische Abbildung von M* definiert durch: $\mathrm{id}_M : M \rightarrow M$ mit $\mathrm{id}_M(x) = x$.

Sei $f : M \rightarrow N$ eine beliebige Funktion, dann gilt:

- $\mathrm{id}_N \circ f = f$
- $f \circ \mathrm{id}_M = f$

3.4 Injektiv, surjektiv, bijektiv

3.4.1 Injektiv

myelin = no collisions

Sei $f : M \rightarrow N$, f ist injektiv, wenn folgendes gilt:

- $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- $\forall y \in N : \exists! x \in M : f(x) = y \vee \neg(\exists x \in M : f(x) = y)$: wenn zu jedem $y \in N$ höchstens (genau eins oder keins) ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$

esiste solo $\wedge$

3.4.1.1 Injektivität zeigen

Injektiv wird meist direkt über die zweite Eigenschaft gemacht oder per Wiederspruchsbeweis (indirekter Beweis) mittels der ersten Eigenschaft bewiesen.

3.4.1.2 Eigenschaften

- Die Gleichung $f(x) = y$, f ist injektiv und y gegeben, verfügt über eine oder keine Lösung für x
- Eine *stetige reelwertige* Funktion auf einem *reelen Intervall* ist genau dann injektiv, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich *streng monoton* steigend oder fallend ist.
- Sind die beiden Funktionen g, f injektiv, so ist die Komposition $g \circ f$ ebenfalls injektiv
- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv

- $f : M \to N$ ist injektiv, wenn es die links inverse Funktion $g : N \to M$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$

3.4.2 Surjektiv

Sei $f : M \to N$, f ist surjektiv, wenn folgendes gilt:

$$\forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y$$

Wenn also für jedes Element aus N mindestens ein (können auch mehr sein) Element in M gibt, dass auf das Element aus N zeigt.

3.4.2.1 Eigenschaften

- Die Gleichung $f(x) = y$, f ist surjektiv und y gegeben, verfügt über eine oder mehrere Lösungen für x.
- Sind die Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ surjektiv, so ist die Komposition $g \circ f : A \to C$ auch surjektiv
- Ist $g \circ f$ surjektiv, so folgt, dass g surjektiv ist
- $f : A \to B$ ist genau dann surjektiv, wenn f ein rechtes Inverse hat, also $g : B \to A$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_B$

3.4.3 Bijektiv

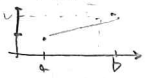
Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

3.4.3.1 Eigenschaften

- Es gelten die Eigenschaften von Injektivität und Surjektivität
- Die Gleichung $f(x) = y$, f ist bijektiv und y gegeben, verfügt über genau eine Lösung für x
- Sind die Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ bijektiv, dann ist auch die Komposition $g \circ f : A \to C$ bijektiv.
- Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv

4 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige reele Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. Dann existiert zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \leq f(b)$, sonst $u \in [f(b), f(a)]$) ein $c \in [a, b]$, sodass gilt: $f(c) = u$.



4.1 Beispiel (Fixpunkt)

Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Zeige: f hat einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$.

Man erzeugt die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) := f(x) - x$. Es gilt: $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$, d.h. ein Punkt x ist genau dann ein Fixpunkt von f wenn er eine Nullstelle von g ist. Es ist zu zeigen, dass g immer eine Nullstelle auf $[0, 1]$ hat. Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig. Weil ausserdem $f(x) \in [0, 1]$ $\forall x \in [0, 1]$ gilt, ist $g(0) \geq 0 \geq g(1)$. Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$ und somit gibt es $f(x) = x$.

5 Folgen in $\mathbb{R}$

5.1 Definitionen

konvergent $\lim_{x\to\infty} a_n$ existiert
divergent $\lim_{x\to\infty} a_n$ existiert nicht
Nullfolge $\lim_{x\to\infty} a_n = 0$ gilt
beschränkt Es gibt C_1, C_2, so dass gilt $C_1 \leq a_n \leq C_2$ bzw. C gibt, so dass $|a_n| \leq C$
unbeschränkt falls (a_n) nicht beschränkt ist. Unbeschränkte folgen sind stets divergent
monoton wachsend $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng monoton wachsend $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
monoton fallend $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
streng monoton fallend $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
alternierend die Vorzeichen der Folgenglieder wechseln sich ab
bestimmt divergent / uneigentlich konvergent es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Definition 5.1 (Grenzwert).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Definition 5.2 (Teilfolge). Werden von einer Folge beliebig viele Glieder weggelassen, aber nur so viele, dass noch unendlich viele übrigbleiben, so erhält man eine Teilfolge.

Definition 5.3 (Häufungspunkt). a ist Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgeglieder liegen. Das ist äquivalent damit, dass a der Limes einer Teilfolge von (a_n) ist.

Definition 5.4 (Limes superior / Limes inferior). Ist (a_n) eine beschränkte Folge, so heisst der grösste Häufungspunkt Limes superior ($\limsup_{n\to\infty} a_n$ oder $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$). Der kleinste Häufungspunkt ist der Limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$ oder $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$)

5.2 Rechnen mit Eigenschaften

Addition:

- $(a_n), (b_n)$ konvergiert $\Rightarrow (a_n + b_n)$ konvergiert
- (a_n) konvergiert, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n + b_n)$ divergent
- (a_n) beschränkt, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n + b_n)$ beschränkt
- (a_n) beschränkt, (b_n) unbeschränkt $\Rightarrow$ $(a_n + b_n)$ unbeschränkt
- (a_n) beschränkt, $(b_n) \to \pm\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to \pm\infty$
- $(a_n) \to \infty$, $(b_n) \to \infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to \infty$
- $(a_n) \to -\infty$, $(b_n) \to -\infty \Rightarrow (a_n + b_n) \to -\infty$

Produkt:

- (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ Nullfolge
- (a_n) konvergent, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n b_n)$ beschränkt
- (a_n) konvergent, (b_n) konvergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ konvergent
- (a_n) konvergent gegen $a \neq 0$, (b_n) divergent $\Rightarrow (a_n b_n)$ divergent

5.3 Rechnen mit Grenzwerten

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$
Achtung! Untenstehendes gilt nur wenn die Grenzwerte von a_n und b_n existieren. (Nicht 0 oder inf sind.)

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot a$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
- Achtung: $\lim_{n\to\infty}(a_n)^c = (\lim_{n\to\infty} a_n)^c$, nur wenn $c \neq n$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, (b_n) keine Nullfolge

5.4 Hilfsmittel

Bernoullische Ungleichung: Für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Vergleich von Folgen: weiter rechts stehende Werte gehen schneller nach ∞

$$1, \quad \ln n, \quad \sqrt[n]{n^\alpha}\ (\alpha > 0), \quad q^n\ (q > 1), \quad n!, \quad n^n$$

Stirlingformel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot e^{\frac{12}{n}}$$

5.5 Konvergenzkriterien

$$a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$$

- Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist der Limes a einziger Häufungspunkt der Folge (a_n) und jede Teilfolge konvergiert auch gegen a.
  Beispiel: Wegen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, so gilt auch $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$
- Hat die Folge zwei verschiedene Häufungspunkte, so ist die Folge sicher divergent.
- Ist die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt, dann existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$. Ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, dann existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$
- Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  Damit kann die Regeln für Reihen verwenden. Siehe Grenzwerte von Reihen.
- Gibt es eine Funktion f mit $f(n) = a_n$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
  Damit kann man zum Beispiel die Regel von l'Hospital und die restlichen Methoden anwenden. Siehe Grenzwerte von Funktionen.
  Achtung: Es kann sein, dass f keinen Grenzwert besitzt, aber (a_n) schon.
- **Einschliessungskriterium**: Sind $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen mit $a_n \le b_n \le c_n$ und haben $(a_n), (c_n)$ den gleichen Grenzwert a, so konvergiert auch (b_n) nach a.

5.6 Tipps & Beispiele

5.6.1 Brüche

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{\sqrt{n^4-n^3}}$

Bei Brüchen empfiehlt es sich den am stärksten wachsenden Teil (das am schnellsten wachsende n) zu kürzen. In diesem Fall ist es das n^4 in der Wurzel, also n^2.

$$\ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{\sqrt{n^4-n^3}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln n}{n^2\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{\ln n}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1-0}} = 1$$

5.6.2 l'Hospital für Folgen (Folge als Funktion)

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

Die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ entspricht unseren Folgegliedern ($f(n) = a_n = \frac{\ln n}{n^2}$). Für $n \to \infty$ hat der Nenner und der Zähler den Grenzwert ∞, also wenden wir die Regel von l'Hospital an.

$$\ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Somit geht auch die Folge gegen 0.

5.6.3 Wurzeln

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1})$

Hier wendet man die dritte binomische Formel an, um den grenzwert zu berechnen. Die einzelnen Terme streben jeweils gegen ∞ und $\infty - \infty$ kann nicht berechnet werden.

Achtung auf die Vorzeichen beim Anwenden der Regel!

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{n^2+1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+an+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}} \qquad (a+b)(a-b) = (a^2-b^2)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2+1}}$$

nun verwenden wir den Tipp für Brüche und kürzen das n heraus

$$\ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$$

5.6.4 Laufvariable im Exponent

$\lim_{x\to 0}(3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}}$
$\Rightarrow (3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\frac{\sin(x)}{x}\cdot\ln(3-|x|)}$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin(x)}{x}\cdot\ln(3-|x|)}$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \ln(3-|x|) = \ln(3)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(3-|x|)^{\frac{\sin(x)}{x}} = e^{\ln(3)} = 3$ ✓

$x \to e^{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = 1$

5.6.5 Gruppieren

Hat man zum Beispiel die Folge $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ so kann man die einzelnen Therme gruppieren und abschätzen in diesem Fall z.B. mit $\frac{1}{4}$ (zweiter Therm, dritter und vierter Therm, fünfter bis achter Therm, nächste 8 Therme, etc.). Wir erhalten dann $s_{2^k} \ge 1 + \frac{k}{4}$ und sehen somit das die Reihe nicht beschränkt ist und somit auch nicht konvergiert.

(come serie Armonica)

5.7 Cauchy-Folgen

Definition 5.5 (Cauchy-Folge). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **Cauchy-Folge**, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n, l \ge n_0 : |a_n - a_l| < \varepsilon$$

Die Definition sagt grundsätzlich aus, dass ab einem $n_0(\varepsilon)$ (also einem Anfang n_0, der abhängig von ε ist) die Folgeglieder nur noch ε Abstand zu einander haben. Also der Abstand beliebig klein wird zwischen Folgegliedern.

Satz 5.1 (Cauchy-Kriterium). Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

6 Reihen

(serie, somme di successioni)

6.1 Definitionen

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent mit Grenzwert s, wenn die Folge der Partialsummen (S_m), $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ gegen s konvergiert. Also wenn gilt: $S_m \to s$.

Definition 6.1 (ε-Kriterium). $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m \ge n_0 : \left|\sum_{n=1}^{m} a_n - s\right| < \varepsilon$

Definition 6.2 (Absolute Konvergenz). Wenn auch die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, so heisst die Reihe absolut konvergent. Aus der absoluten Konvergenz folgt Konvergenz. Der Umkehrschluss ist nicht möglich.

6.2 Rechenregeln Reihen

Für konvergente Reihen gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \mid \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

6.3 Konvergenzkriterien

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Wenn also $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, so konvergiert die Reihe nicht

6.3.1 Reihen Kriterien

Achtung. Die nachfolgenden Kriterien sagen nur aus, ob die Reihen konvergiert oder nicht. Sie sagen nicht aus, gegen was sie konvergieren!

6.3.1.1 Quotientenkriterium

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to q$. Dann gilt $\begin{cases} q<1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q=1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q>1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$

6.3.1.2 Wurzelkriterium

$\sqrt[n]{|a_n|} \to q$. Dann gilt $\begin{cases} q<1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ q=1 & \Rightarrow \text{keine Aussage} \\ q>1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \end{cases}$

6.3.1.3 Leibnizkriterium

Wenn gilt:

- (a_n) ist alternierende Folge, d.h die Vorzeichen wechseln jedes Mal
- $a_n \to 0$ oder $|a_n| \to 0$
- $(|a_n|)$ ist monoton fallend

... dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

6.3.1.4 Majorantenkriterium

Ist $|a_n| \leq b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

6.3.1.5 Minorantenkriterium

Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

6.4 Potenzreihe

Die Potenzreihe hat die allgemeine Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

(a_n: coefficient; x_0: const, center of convergence; x: variable)

x_0 ist der Entwicklungspunkt der Potenzreihe und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge.

6.4.1 Konvergenzradius

Die Berechnung des Konvergenzradius ist für solche Reihen einfacher, da der Faktor $(x - x_0)$ nicht analysiert werden muss. Entsprechend gilt für den Konvergenzradius r: $r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$ (Wurzelkriterium) bzw. $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (Quotientenkriterium).

the power series converges if $|x - x_0| < r$

7 Taylorreihe / -entwicklung

Funktionen werden in der Umgebung eines bestimmten Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt. Damit wird die ursprüngliche Funktion angenähert.

Die Taylorreihe der Funktion f mit Grad m um den Punkt a ist: $T_m f(x;a) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 \ldots$

Dabei ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

7.1 Rechenregeln

7.1.1 Addition

f, g sind m-mal differenzierbar:

$T_m(f+g)(x;a) = T_m f(x;a) + T_m g(x;a)$

7.1.2 Multiplikation

f, g sind m-mal differenzierbar:

$T_m(f \cdot g)(x;a) = T_m(T_m f(x;a) \cdot T_m g(x;a))$

Achtung: Anschaulich bedeutet es folgendes: Man multipliziert die beiden Taylorreihen von f und g miteinander $(T_m f(x;a) \cdot T_m g(x;a))$. Danach entfernt man alle Terme der Ordnung $> m$.

7.1.3 Kettenregel

$f : A \to B, g : B \to \mathbb{R}$ zwei m-mal differenzierbare Funktionen. Entwickelt wird um den Punkt $a \in A$ mit $g(a) = q$ (q muss man berechnen). Dann gilt:

$$\begin{aligned} T_m(g \circ f)(x;a) &= T_m(f(g))(x;a) \\ &= T_m(T_m g(x;a) \circ T_m f(x;q)) \\ &= T_m(T_m f(T_m g(x;a))(x;q)) \end{aligned}$$

7.1.4 Bemerkungen / Eigenschaften / Konvergenz

- Der Konvergenzradius kann 0 sein
- Falls Taylor-Reihe konvergiert, dann ist sie nicht notwendig gleich der Funktion, die sie beschreibt. Gegenbeispiel:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$
- Ist f eine Potenzreihe, dann ist diese Potenzreihe auch die Taylor-Reihe

8 Stetigkeit und Limes einer Funktion

$\lim_{x\to a} f(x) = b$ bedeutet, dass die Funktion f für $x \to a$ den Grenzwert b hat. Der Funktionswert nähert sich also immer näher an b heran, wenn x sich a annähert (Epsilon-Delta-Kriterium).

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Funktionsfolgen verhalten sich desweiteren wie Folgen. Es gelten also die gleichen Eigenschaften.

Existiert der Grenzwert, so konvergiert die Funktion, andernfalls divergiert sie. Der Grenzwert existiert nicht wenn die Funktion eine Division durch 0 enthält oder wenn er gegen ∞, resp. $-\infty$ divergiert.

8.1 (Punktweise) Stetigkeit

Die Definition für punktweise Stetigkeit ist die gleiche, wie die für $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (siehe die Definition gerade über diesem Kapitel).

Charakterisierungen der Stetigkeit von f im Punkt a:

- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ist die Definition
- Man kann $\lim_{x\to a} f(x)$ auch als $f(\lim_{x\to a} x)$ schreiben. Also die Reihenfolge zwischen Bildung des Grenzwertes und der Anwendung der Funktion vertauschen. Beispiel: $\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}) = \sin(0) = 0$
- Es gilt linker Grenzwert = Funktionswert = rechter Grenzwert: $\lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x\searrow a} f(x)$
- Für eine beliebige (jede) Folge (x_n) mit $x_n \to a$ hat $f(x_n) \to f(a)$ zu gelten. Dies ist praktisch um zu zeigen, dass eine Funktion an einer Stelle nicht stetig ist.

Eine Funktion f ist stetig, wenn sie in allen Punkten stetig ist ("punktweise Stetigkeit").

Es gelten folgenden Eigenschaften:

- Ist f und g stetig in einem gemeinsamen Definitionsbereich, so sind $f+g, f-g, f\cdot g, \frac{f}{g}, f \circ g$ ebenfalls stetig.

8.2 Gleichmässige Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, dann ist f genau dann stetig wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Der Unterschied zur punktweisen Stetigkeit liegt darin, dass δ und ε nicht auch noch von x_0 abhängig sind. So ist $f(x) = x^2$ zwar (punktweise) stetig, aber nicht gleichmässig stetig. Begründung: Je weiter rechts man zwei Punkte mit einem Abstand kleiner als δ wählt, desto grösser wird der Abstand der beiden Funktionswerte. Dieser Abstand der Funktionswerte müsste aber kleiner als das vorgegebene ε bleiben.

8.3 Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante L existiert, so dass gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \cdot \|x_1 - x_2\|$$

la distanza tra le immagini è al massimo proporzionale alla distanza tra x

Beispiel

Zeigen sie das die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

konvergiert. Man zeige, dass der Grenzwert L die Ungleichung $\frac{1}{2} < L < \frac{5}{6}$ erfüllt.

Die Reihe konvergiert. Sei $L_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ die N-te Partialsumme. Es gilt

$$L_2 < L_4 < L_6 < \ldots < L_5 < L_3 < L_1$$

und daraus folgt $L_2 = \frac{1}{2} < L < \frac{5}{6} = L_3$.

8.4 Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit

Sei f eine Funktion, so gilt:

f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

continuità è prerequisito per la derivabilità, ma non la garantisce

f *nicht* integrierbar $\Rightarrow$ f *nicht* stetig $\Rightarrow$ f*nicht* differenzierbar

8.5 Abhängigkeit der Stetigkeitsbegriffe

Sei f eine reelle Funktion, so gilt:

f Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f absolut stetig $\Rightarrow$ f gleichmässig stetig $\Rightarrow$ f (punktweise) stetig.

8.6 Regel von de l'Hospital

Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Es hat zu gelten:

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$
- In der Nähe von a ist $g'(x) \neq 0$

Dann ist

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Diese Regel kann man mehrfach anwenden hintereinander. Achtung: Es kann sein, dass der Limes $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht existiert, aber von $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ trotzdem.

8.7 Tips zur Stetigkeit

- Um zu zeigen das eine Funktion mit mehreren Parameter in einem Punkt *nicht* stetig ergänzbar ist hilft es häufig die Parameter gleich zu setzen. (Häufig geht dann der Limes nicht gegen den gesuchten Punkt $\Rightarrow$ die Funktion ist *nicht* stetig ergänzbar.)

9 Stetigkeit von Funktionen mit mehreren Variabeln

Definition 9.1 (Grenzwert). Eine Funktion $f(\vec{x})$ hat einen Grenzwert b an der Stelle $\vec{a}$, wenn für jede vektorwertige Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, mit $\vec{x}_k \neq \vec{a}$, $\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = b$ erfüllt ist

Definition 9.2 (Stetigkeit). Die Funktion $f(\vec{x})$ ist stetig im Punkt $\vec{a}$, wenn für beliebige Folgen $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(\vec{x}_k) \to \vec{a}$ gilt: $\lim_{\vec{x}_k\to\vec{a}} f(\vec{x}_k) = f(\vec{a})$ für alle k gilt.

9.1 Typische Fälle

- x-Achse entlang: $y = 0$
- y-Achse entlang: $x = 0$
- Winkelhalbierende: $x = y$

Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Die Funktion ist als Komposition, Addidition und Multiplikation stetiger Funktionen überall ausser in $(0,0)$ stetig (1. Zeile). Es bleibt zu untersuchen, ob f auch in $(0,0)$ stetig ist.

Längs der x-Achse ($y = 0$) erhalten wir:

$$f(x,0) = \frac{4x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Als nächstes untersuchen wir die Winkelhalbierende ($x = y$):

$$f(x,x) = \frac{4x^2}{x^2+x^2} = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} 2 = 2$$

Die Funktion ist somit in $(0,0)$ nicht stetig, da $\lim_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim_{x\to 0} f(x,x)$ ist.

10 Funktionsfolgen !

10.1 Definition

Eine Funktionsfolge (f_n) konvergiert punktweise auf dem Definitionsbereich I gegen f, wenn für jedes $x \in I$ gilt $f_n(x) \to f(x)$.

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall x \in I\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Die Folge konvergiert gleichmässig auf I gegen f, wenn $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ gilt. Das bedeutet, dass die obere Definition für alle x dasselbe n_0 verwendet und nicht jeweils verschiedene:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in I : n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Wichtig: gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz. Nicht aber andersrum!

la grenzfunktion muss auch stetig sein, sonst kann $f_n(x)$ nicht gegen $f(x)$ konvergieren, wenn $f_n(x)$ stetig ist.

11 Differenzierbarkeit

11.1 Definition

f ist in $a \in I$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(a)$, wenn

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a) = \frac{d}{dx}f(a)$$

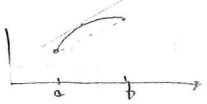
existiert.

Ist f' stetig im Definitionsbereich, so heisst f stetig differenzierbar. Man kann also f differenzieren und bekommt mit f' eine stetige Funktion. Es gilt auch $f \in C^1(I)$. $C^n(I)$ ist die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen über dem Intervall I.

11.2 Mittelwertsatz (Satz von Lagrange)

Ist f au $[a,b]$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar, so gibt es ein $c \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



11.2.1 Beispiel: Ungleichungen

Zu zeigen: $e^x(y - x) < e^y - e^x < e^y(y - x)$, $\forall x < y$: $(e^x)' = e^x$

Der Mittelwertsatz wird auf die Exponentialfunktion angewendet. Damit gilt für ein Paar von Zahlen $x < y$ ein $u \in]x,y[$, für welches gilt: $\frac{e^y - e^x}{y - x} = e^u$. Weil die Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, gilt $e^x < e^u < e^y$ und somit gilt:

$e^x < \frac{e^y - e^x}{y-x} < e^y$. Multipliziert man nun mit dem Nenner des Bruchs bekommt man: $e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x)$.

11.3 Monotonie

- $f' > 0 \Rightarrow f$ streng monoton steigend
- $f' \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton steigend
- $f' < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend
- $f' \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend

Insbesondere besitzt die Funktion f wenn sie streng monoton wachsend/fallend ist weder kritische Punkte, noch lokale oder globale Extrema.

11.4 Konvexität

Definition 11.1 (konvex). Eine Funktion f ist konvex, wenn $\forall a, b : f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Definition 11.2 (konkav). Eine Funktion f ist konkav, wenn $\forall a, b : f(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Anschaulich: Anschaulich bedeutet das, dass bei einer konvexen Funktion der Graph immer unter und bei einer konkaven stets über der Sekante liegt. Der Graph konvexer Funktionen ist linksgekrümmt, der konkaver Funktionen ist rechtsgekrümmt.

- $f'' \geq 0 \Leftrightarrow f$ konvex
- $f'' \leq 0 \Leftrightarrow f$ konkav

11.4.1 Extremstellen

- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Minimum bei x_0
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Maximum bei x_0
- $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt in x_0
- $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt in x_0
- Extrema bei $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

11.4.2 Beispiel Wendepunkt berechnen

Die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt lautet: $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Praktische Vorgehensweise für $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$:
Um eine Funktion auf Wendepunkte hin zu untersuchen, führen wir die folgenden Schritte durch:

- Wir leiten die Funktion f(x) dreimal ab. $f'(x) = x^2 - 4x + 3$, $f''(x) = 2x - 4$ und $f'''(x) = 2$
- Wir setzen die zweite Ableitung Null und berechnen den X-Wert, sofern möglich $f''(x) = 2x - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 2$
- Sofern möglich, setzen wir diesen X-Wert in die dritte Ableitung ein $f'''(x) = 2$
- Ist dieses Ergebnis ungleich Null, liegt ein Wendepunkt vor $f'''(x) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt
- Der X-Wert wird in f(x) eingesetzt, um den zugehörigen Y-Wert zu bestimmen. $x = 2$ in $f(x)$ einsetzen: $f(2) = \frac{1}{3}2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = \frac{2}{3}$

11.5 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

- differenzierbar $\Rightarrow$ stetig
- differenzierbar $\not\Leftarrow$ stetig

11.6 Umkehrsatz

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für jedes $x \in I$, so ist f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend und damit injektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ existiert und ist ebenfalls streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Die Ableitung $(f^{-1})'(y)$ existiert für alle $y \in f(I)$ mit $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$), und zwar gilt dann

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

11.7 Monotonie, Bijektion, Differenzierbarkeit

Satz 11.1. (*Folgendes gilt auch für streng monoton fallende Funktionen*)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Es sei dann $A = f(a), b = f(b)$, dann gilt: $f : [a, b] \to [A, B]$ ist bijektiv.

f hat also eine Umkehrfunktion $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ und diese ist stetig und streng monoton wachsend.

Tipp: Differentierbare Funktionen sind stetig.

12 Partialbruchzerlegung

Mit dieser Methode wird ein schwieriger Bruch in eine Summe von einfacheren Brüchen zerlegt. Damit lässt sich der ursprüngliche Bruch einfacher integrieren.

1. Den Grad des Zählers und des Nenners vergleichen von R
   i) Ist der Zählergrad (über Bruchstrich) grösser oder gleich dem Nennergrad (unter Bruchstrich), so dividiert man den Zähler durch den Nenner. Man erhält daraus das Polynom P^* und möglicherweise einen Rest R^*, sodass gilt: $R = P + R^*$.
   ii) Ist $R^* \equiv 0$, so ist das Verfahren abgeschlossen. Sonst arbeitet man nun mit dem Rest R^* weiter als Bruch, den man ansieht.
2. Man berechnet die Nullstellen vom Nenner des Bruches.
3. Nun setzt man den ursprünglichen Bruch gleich der Summe der Partialbrüche. Die Partialbrüche sind jeweils abhängig von den Nullstellen:
   i) Für jede einfache reelle Nullstelle x_i ist der Summand $\frac{a_{i1}}{x - x_i}$ zu nehmen
   ii) Für jede r_i-fache Nullstelle x_i erhält man r_i Summanden: $\frac{a_{i1}}{x-x_i} + \frac{a_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{a_{ir_i}}{(x-x_i)^{r_i}}$
4. Nun berechnet man die unbekannten a_{ij} indem man die Partialbrüche gleichnamig macht und dann die Koeffizienten des ursprünglichen Zählers mit denen des gleichnamigen Bruchs vergleicht.

Beispiel

$R(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}$.
Der Zählergrad ist gleich dem Nennergrad, weswegen wir eine Polynomdivision durchführen: $\Rightarrow R(x) = 1 + \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Aus $(x-1)^2$ folgt, das wir nur eine Nullstelle haben $x_0 = 1$. Es handelt sich dabei um eine doppelte Nullstelle.

Somit gilt:

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2}$$
$$2x - 1 = a_1(x-1) + a_2$$
$$2x - 1 = a_1 x - a_1 + a_2$$

Daraus folgt, dass $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$ (lineares Gleichungssystem).

Somit gilt: $R(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

13 Integralrechnung

13.1 Berechnung

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

13.1.1 Substitutionsregel

$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$

1. Für die neue Variable $u = g(x)$ bildet man: $\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow du = g'(x)dx$. Ersetzt also $g(x) = u$ und $dx = \frac{du}{g'(x)}$. Wenn noch x übrig sind, ist ein Zwischenschritt nötig: Löse $u =$

$g(x)$ nach x auf, somit resultiert eine neue Formel mit $x = h(u)$, substituiere nun x durch $h(x)$.

2. Bei bestimmten Integralen: Sei $\int_a^b \dots dx$. Dann sind die neuen Grenzen für das neue Integral $g(a)$ und $g(b)$
3. Berechne das Integral in u
4. Ersetze im Ergebnis u durch $g(x)$

13.1.2 Integrale mit Parametern

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und partiell nach t diffbar mit stetiger Ableitungsfunktion. Betrachte

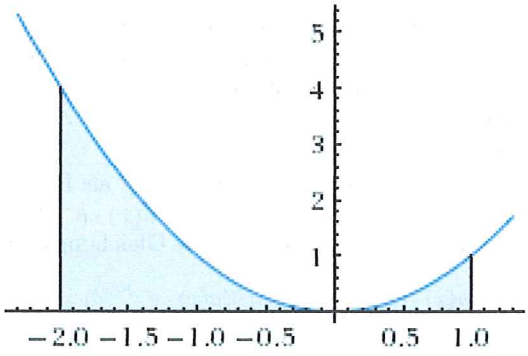
$$u(y) = \int_0^y h(x, y)\, \mathrm{d}x$$

Dann ist $u \in C^1(\mathbb{R})$ und für die Ableitung gilt

$$\dot{u}(y) = h(x, y)|_{x=y} + \int_0^y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x \quad ?$$

13.1.3 Beispiel: einfaches Integral

Das Integral $\int_{-2}^{1} x^2\, dx$ berechnet die blaue Fläche die durch die Funktion $f(x) = x^2$ beschränkt wird. $F(x)$ sei die Stammfunktion von $f(x)$, generell berechnen wir $\int x^y\, dx = \frac{x^{(y+1)}}{y+1}$, somit $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Somit $\int_{-2}^{1} x^2\, dx = F(x)\,|_{-2}^{1} = F(1) - F(-2) = \frac{1^3}{3} - \frac{-2^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$.



13.1.4 Beispiel: Substitution

$\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3\, dx$

Die Wurzel wird substituiert: $u = g(x) = \sqrt{x+1}$.

1. $\frac{du}{dx} = g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2u}$. Somit wird $\sqrt{x+1}^3$ durch u^3 ersetzt und dx durch $\frac{du}{\frac{1}{2u}} = 2u\, du$. Im Integral wären somit die Wurzel und das dx ersetzt. Es bleibt noch das x übrig vor der Wurzel. Lösen wird $\sqrt{x+1} = u$ nach x auf, so erhalten wir $x = u^2 - 1$.
2. Neue Grenzen: $g(0) = 1$ und $g(2) = \sqrt{3}$
3. $\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} (u^2 - 1)u^3 2u\, du = 2\int (u^6 - u^4)\, du = [\frac{2}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5]_1^{\sqrt{3}}$
4. Rücksubstitution: $\int_0^2 x\sqrt{x+1}^3\, dx = [\frac{2}{7}\sqrt{x+1}^7 - \frac{2}{5}\sqrt{x+1}^5]_1^{\sqrt{3}} = \dots = \frac{144}{35}\sqrt{3} + \frac{4}{35}$

14 Riemannsummen (Riemannintegral)

14.1 Riemansumme

Wir betrachten die folgende Einteilung des Intervals $[a, b]$:

$$E : [a, b] = \bigcup_{k=1}^{N} [x_{k-1}, x_k] \text{ mit } x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}.$$

Die Feinheit dieser Zerlegung ist:

$$\delta(E) \equiv max\{x_k - x_{k-1} | k = 1 \dots N\} = \frac{b-a}{N} \xrightarrow{N\to\infty} = 0$$

ξ_i sein ein Punkt auf dem Interval $[x_{i-1}, x_i]$, somit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

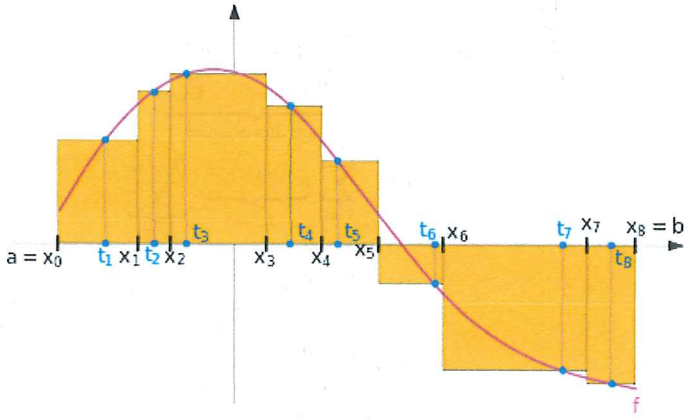


Abbildung 1: Darstellung Riemannintegral mit $\xi_i = t_i$ und unsymetrischer Intervaleinteilung E.

Somit können wir die Riemannsumme bilden:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum(f, E, \xi)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{“Höhe”}} \cdot \underbrace{\delta(E)}_{\text{“Länge”}}}_{\text{Riemann-Summe}}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(a + k\frac{b-a}{N}) \cdot \frac{b-a}{N}$$

14.2 Riemann Integrabel

Die Funktion f sei Riemann Integrabel wenn es ein $I \in \mathbb{R}$ gibt so dass: $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu > 0$ so dass

$$|I| - \varepsilon < \sum(f, E, \xi) < |I| + \varepsilon$$

für jede Einteilung E von $[a, b]$ mit $\delta(E) < \nu$, und für jede Wahl von Zwischenpunkten ξ.

Jede monotone Funktion und jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.

Beispiel

Es soll das Intergral mittels Riemannschen Summe berechnet werden: $\int_a^b e^{\lambda x}\, dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $f(x) = e^{\lambda x}$

Zuerst unterteilt man das Intervall $[a, b]$: $E : [a, b] = \bigcup_{k=1}^{N} [c_{k-1}, c_k]$ mit $c_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}$.

Die Feinheit dieser Zerlegung ist somit $\delta(E) = \max\{c_k - c_{k-1} | k = 1 \dots N\} = \frac{b-a}{N}$. Dabei gilt $\delta(E) = \frac{b-a}{N} \to 0$ $(N \to \infty)$. Dies ist wichtig. Wir müssen die Feinheit unglaublich klein bekommen können, also nahezu 0. Je feiner die Feinheit desto genauer wird unsere Riemann'sche Summe. Der Grenzwert dieser Summe für $N \to \infty$ ist der Wert des bestimmten Riemann-Integrals.

Zusätzlich müssen wir festlegen, an welchen Punkten in den Teilintervallen wir den Funktionswert auswerten. Hier legen wir fest: $x_k = c_{k-1}$, also jeweils am Punkt an dem das Teilintervall beginnt.

Daraus erhalten wir nun:

$$\int_a^b e^{\lambda x}\,dx = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{f(x_k)}_{\text{“Höhe”}} \cdot \underbrace{\delta(E)}_{\text{“Länge”}}}_{\text{Riemann-Summe}}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{e^{\lambda(a+k\frac{b-a}{N})}}_{f(x_k)} \underbrace{\frac{b-a}{N}}_{\delta(E)}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} e^{\lambda a} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{\lambda\frac{b-a}{N}})^k$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} e^{\lambda a} \left(\frac{1-e^{\lambda(b-a)}}{1-e^{\lambda\frac{b-a}{N}}} \right)$$

Wir wissen, dass $\rho = \frac{b-a}{N} \to 0$ für $N \to \infty$. Somit ersetzten wir es entsprechend:

$$\int_a^b e^{\lambda x}\,dx = \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot e^{\lambda a} \cdot \frac{1-e^{\lambda(b-a)}}{1-e^{\lambda\rho}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho(e^{\lambda a} - e^{\lambda b})}{1-e^{\lambda\rho}}$$

$$\overset{\text{d'H}}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}}{-\lambda e^{\lambda\rho}}$$

$$= \frac{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda a} - e^{\lambda b})$$

15 Differentialgleichung (DGL)

15.1 Lineare DGL 1. Ordnung ($y' + f(x) \cdot y = g(x)$)

15.1.1 Variation der Konstanten

Sei:

$$F(x) = \int f(t)dt.$$

Dann ist $\{y_{Hom}(x) = c_1 e^{F(x)} | c_1 \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Lösungen der homogenen Differnentialgleichung $(y' + f(x) \cdot y = 0)$. Als Ansatz für die Lösung des inhomogenen Problems setze man $y_p(x) = u(x)e^{F(x)}$, d.h. man *lässt die Konstante c_1 variieren*. Dies ergibt eine eindeutige Zuordnung zwischen den Funktion y und u. Denn $e^{F(x)}$ ist eine stets positive, stetig differnezierbare Funktion. Die Ableitung dieser Ansatzfunktion ist

$$y_p'(x) = u(x)f(x)e^{F(x)} + u'(x)e^{F(x)} = y(x)f(x) + u'(x)e^{F(x)}$$

Also löst y die inhomogene Differntialgleichung

$$y_p'(x) = y(x)f(x) + g(x)$$

genau dann, wenn

$$u'(x) = y(x)f(x) + g(x)$$

gilt. Also folgt

$$u(x) = \int g(t)e^{-F(t)}dt$$

Somit ist die Lösungsmenge von y_p

$$\{y_p'(x) = e^{F(x)}(u(x) + c_2) | c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Die Lösungsmenge der generellen Lösung der allgemeinen Lösung ist somit y:

$$\{y\} = \{y = y_{Hom} + y_p\}$$
$$= \{y(x) = c_1 e^{F(x)} + e^{F(x)}(u(x) + c_2) | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Gibt es nun einen Ansatz, kann diese menge durch Einsetzen des Funktionswert und Gleichsetzen mit dem Resultat genau bestimmen werde in dem die Konstanten c aufgelöst werden.

Konkret reicht es also aus. F und u zu berechnen.

15.1.2 genereller Ansatz (separierbare Variable)

Wenn $g(x) = 0$ ist, dann ist die DGL homogen. Falls $g(x) \neq 0$, so handelt es sich um eine inhomogene DGL.

Der erste Schritt für homogene und inhomogene DGL ist die Lösung der homogenen DGL: $y' + f(x) \cdot y = 0$:

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \quad |-(f(x) \cdot y)$$
$$y' = -f(x) \cdot y \quad \boxed{y' \text{ ist das gleiche wie } \frac{dy}{dx}}$$
$$\frac{dy}{dx} = -f(x) \cdot y \quad |\div y$$
$$\frac{dy}{dx\,y} = -f(x) \quad \Big| \int$$
$$\int \frac{dy}{dx\,y}dx = \int -f(x)dx \quad \boxed{\frac{dy}{dx\,y} \cdot dx = \frac{dx}{dx\,y}dy = \frac{1}{y}dy}$$
$$\int \frac{1}{y}dy = \int -f(x)dx$$
$$\ln(y) = -F(x) \quad |e^{\alpha}$$
$$e^{\ln(y)} = e^{-F(x)}$$
$$\boxed{y = e^{-F(x)}}$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung: $y = A \cdot e^{-F(x)}$. Hat man eine homogene DGL und einen Punkt, an dem die ursprüngliche Funktion ausgewertet wurde, so kann man die explizite Lösung berechnen (also A berechnen), in dem man die hier allgemein erhaltene Lösung für den gegebenen Punkt auswertet und so die Unbekannte bekommt.

Für ein inhomogenes DGL setzt sich die allgemeine Lösung aus der homogenen Lösung y_h und der partikulären (speziellen) Lösung y_p der inhomogenen DGL zusammen. Die homogene Lösung haben wir bereits berechnet: $y_h = A \cdot e^{-F(x)}$. Nun folgt die partikuläre Lösung:

Dazu wird die Konstante (A) der homogenen Lösung als Funktion dargestellt ($u(x)$). Wir erhalten somit: $y_p = u(x) \cdot e^{-F(x)}$. Dieses y_p setzten wir nun als y in die inhomogene Gleichung ein:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \Rightarrow \underbrace{(u(x) \cdot e^{-F(x)})'}_{=y_p=y} + f(x) \cdot \underbrace{(u(x) \cdot e^{-F(x)})}_{=y_p=y} = g(x)$$

Die neue Gleichung wird nun nach $u'(x) = \ldots$ aufgelöst, was zu $u'(x) = \frac{g(x)}{e^{-F(x)}}$ führt. Nun wird $u(x)$ bestimmt durch integrieren beider Seiten: $u(x) = \int \frac{g(x)}{e^{-F(x)}}\,dx$. Hat man dies ausgerechnet, setzt man $u(x)$ in $y_p = u(x) \cdot e^{-F(x)}$ ein und bekommt so die partikuläre Lösung der DGL.

Als letzter Schritt für inhomogene DGL summiert man y_h und y_p und erhält nach dem Umformen und Kürzen die allgemeine Lösung der DGL:

$$y = y_h + y_p = \underbrace{A \cdot e^{-F(x)}}_{=y_h} + \underbrace{\underbrace{\int \frac{g(x)}{e^{-F(x)}}\,dx}_{=u(x)} \cdot e^{-F(x)}}_{=y_p}$$

Hat man für die inhomogene DGL ebenfalls Punkte an denen die Funktion ausgewertet wurde, so kann man dies in die allgemeine Lösung eintragen und so die Unbekannten (A) berechnen.

15.1.3 Beispiel mit Variation der Konstanten

Gegeben: $y' + x^2 \cdot y = 2x^2$

Somit: $y' = f(x) \cdot y + g(x)$ mit $g(x) := 2x^2$ und $f(x) := -x^2$

Es gilt somit:

$$F(x) = \int f(t)dt. = \int -x^2 dt. = -\frac{x^3}{3}$$

Dann ist

$$\{y_{Hom}(x) = c_1 e^{-\frac{x^3}{3}} | c_1 \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Lösungen der homogenen Differnentialgleichung $(y' + x^2 \cdot y = 0)$.

Dieser Teil muss nicht berechnet werden (Herleitung).
Als Ansatz für die Lösung des inhomogenen Problems setze man $y_p(x) = u(x)e^{F(x)}$.
Ansatzfunktion ist
$$y_p'(x) = u(x)f(x)e^{F(x)} + u'(x)e^{F(x)} = y(x)f(x) + u'(x)e^{F(x)}$$
Also löst y die inhomogene Differntialgleichung
$$y_p'(x) = y(x)f(x) + g(x)$$
genau dann, wenn
$$u'(x) = y(x)f(x) + g(x)$$
gilt.

Also folgt
$$u(x) = \int g(x)e^{-F(x)}dx. = 2\int x^2 e^{\frac{x^3}{3}}dx. = 2e^{\frac{x^3}{3}}$$
Somit ist die Lösungsmenge von y_p
$$\{y_p'(x) = e^{-\frac{x^3}{3}}(2e^{\frac{x^3}{3}} + c_2)|c_2 \in \mathbb{R}\} = \{y_p'(x) = 2 + c_3)|c_3 \in \mathbb{R}\}$$
Die Lösungsmenge der generellen Lösung der allgemeinen Lösung ist somit y
$$\{y(x) = c_1 e^{-\frac{x^3}{3}} + 2|c_1 \in \mathbb{R}\}$$

15.1.4 Beispiel genereller Ansatz

Gegeben: $y' + x^2 \cdot y = 2x^2$
Homogene DGL lösen: $y' + x^2 \cdot y = 0$

$$\begin{aligned}
y' + x^2 \cdot y &= 0 \\
\frac{dy}{dx} + x^2 \cdot y &= 0 \quad | -(x^2 \cdot y) \\
\frac{1}{dx}dy &= -x^2 \cdot y \quad | \div y \\
\frac{1}{dx}\frac{1}{y}dy &= -x^2 \quad | \int \\
\int \frac{1}{dx}\frac{1}{y}dy\,dx &= \int -x^2\,dx \\
\int \frac{1}{y}dy &= \int -x^2\,dx \\
\ln(y) &= -\frac{1}{3}x^3 \quad |e^{\alpha} \\
y &= e^{-\frac{1}{3}x^3}
\end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine homogene Lösung: $y_h = A \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$.
Als nächstes gehen wir die praktikuläre Lösung an: $y_p = u(x) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (u(x) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3})' + x^2(u(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}) = 2x^2 \\
u'(x) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} - u(x) \cdot x^2 e^{-\frac{1}{3}x^3} &+ u(x)x^2 e^{-\frac{1}{3}x^3} = 2x^2 \\
u'(x) \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} &= 2x^2 \quad | \div e^{-\frac{1}{3}x^3} \\
u'(x) &= 2x^2 e^{\frac{1}{3}x^3} \quad | \int \\
u(x) &= 2e^{\frac{1}{3}x^3}
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit: $y_p = 2e^{\frac{1}{3}x^3} \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} = 2$. Die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL ist somit: $y = y_h + y_p = A \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + 2$

15.1.5 Beispiel Direkterer Lösungsweg

Gegeben: $y' + x^2 \cdot y = 2x^2$. Direkt lösen:

$$\begin{aligned}
y' + x^2 \cdot y &= 2x^2 \\
\frac{dy}{dx} + x^2 \cdot y &= 2x^2 && -(x^2 \cdot y) \\
\frac{dy}{dx} &= 2x^2 - x^2 \cdot y && \text{vereinfachen} \\
\frac{dy}{dx} &= x^2(2 - y) && \div(2 - y) \\
\frac{\frac{dy}{dx}}{2-y} &= x^2 && \int \text{ with respect to } x \\
\int \frac{\frac{dy}{dx}}{2-y}dx &= \int x^2\,dx && \text{links: } \int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| \\
-ln|2 - y| &= \frac{x^3}{3} + c_1 && \cdot(-1) \\
ln|2 - y| &= -\frac{x^3}{3} - c_1 && e \\
e^{ln|2-y|} &= e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1} \\
2 - y &= e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1} && -2 \\
-y &= e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1} - 2 && \cdot(-1) \\
y &= -e^{-\frac{1}{3}x^3 - c_1} + 2 && \text{replace const} \\
y &= c_2 \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + 2
\end{aligned}$$

15.2 Lineare DGL höherer Ordnung

Hier geht es um DGL der Form: $a_n y^{(n)} + a_{(n-1)}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = g(x)$.

Wieder unterscheiden wir homogene DGL ($g(x) = 0$) und inhomogene DGL ($g(x) \neq 0$).

Als ersten Schritt lösen wir für homogene und inhomogene DGL die homogene Version der DGL: $a_n y^{(n)} + a_{(n-1)}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$. Dazu ersetzen wir $y^{(n)}$ durch $\lambda^n (\cdot e^{\lambda x})$ Beispielsweise wird aus $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ wird $a_2\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$.

Diese neue Gleichung ist das charakteristische Polynom. Von diesem berechnen wir als erstes die Nullstellen λ_i. Wir beachten, dass wir auch komplexe Nullstellen miteinbeziehen. Auch merken wir uns die Vielfachheit einer Nullstelle.

Hat man die Nullstellen λ_i, so lösen für einfache Nullstellen $e^{\lambda_i x}$ die homogene DGL. Ist die Nullstelle λ_i k-fach, so lösen $e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_i x}$ die homogene DGL. Wir erhalten also die allgemeine homogene Lösung in einer ähnlichen Form wie: $y_h = C_n e^{\lambda_n x} + \underbrace{C_{n-1}e^{\lambda_{n-1}x} + C_{n-2}xe^{\lambda_{n-1}x}}_{\lambda_{n-1}\text{: 2-fache Nullstelle}} + \ldots +$
$\underbrace{C_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_1 e^{\lambda_1 x}}_{\lambda_1\text{: 3-fache Nullstelle}}$.

Ist λ_i eine komplexe Nullstelle, so ist λ_i der Form $\lambda_i = a + i \cdot b$. Zu jeder komplexen Nullstelle gibt es auch eine konjugierte Nullstelle: $\lambda_k = a - i \cdot b$. Aus diesem Grund lösen für die komplexe Nullstelle (λ_i) $e^{x(a+ib)}$ und $e^{x(a-ib)}$ das homogene DGL. Achtung: Nachfolgend lohnt es sich oft die Eulersche Identität zu verwenden: $e^{i \cdot x} = \cos(x) + i\sin(x)$.
Die allgemeine Lösung der homogenen DGL haben wir nun gefunden. Die Unbekannten C_i können gefunden werden, wenn genügend Punkte gegeben sind, an denen der Funktionswert bekannt ist.

Hat man ursprünglich eine inhomogene DGL vorliegen, so muss man für die allgemeine Lösung noch die partikuläre Lösung des inhomogenen DGL berechnen. Dazu werden die Unbekannten C_i durch Funktionen $u_i(x)$ ersetzt. So wird aus $y_h = C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_1 e^{\lambda_1 x} \Rightarrow y_p = u_2(x)xe^{\lambda_1 x} + u_1(x)e^{\lambda_1 x}$ (eine doppelte Nullstelle).

Jetzt geht es darum die Funktionen $u_i(x)$ zu bestimmen, um sie in die vorherige y_p-Gleichung einsetzen zu können. Dazu stellen wir i Gleichungen auf. Also so viele, wie wir unbekannte Funktionen $u_i(x)$ haben:

$$\begin{aligned}
u_2(x)'(xe^{\lambda_1 x}) + u_1(x)'(e^{\lambda_1 x}) &= 0 \\
u_2(x)'(xe^{\lambda_1 x})' + u_1(x)'(e^{\lambda_1 x})' &= g(x)
\end{aligned}$$

Das Prinzip ist folgendes: Bis auf die letzte Gleichung, wird gleich 0 gesetzt. Die letzte Gleichung wird gleich $g(x)$ gesetzt. Unsere unbekannten Funktionen werden jeweils einmal abgeleitet, egal in welcher Gleichung wir sind. Pro Zeile, die man weiter runter geht, wird der Term mit $e^{\lambda_i x}$ jeweils einmal mehr abgeleitet. In der ersten Zeile wird zum Beispiel $e^{\lambda_1 x}$ nicht abgeleitet, in der nächsten Gleichung wird es einmal abgeleitet. Hätten wir mehr Unbekannte Funktionen, so würde in der folgenden Zeile zwei mal abgeleitet werden. Im Allgemeinen gilt also:

$$\begin{aligned}
u_1(x)'y_{h1}(x) + u_2(x)'y_{h2}(x) + \ldots + u_n(x)'y_{hn}(x) &= 0\\
u_1(x)'y_{h1}(x)' + u_2(x)'y_{h2}(x)' + \ldots + u_n(x)'y_{hn}(x)' &= 0\\
u_1(x)'y_{h1}(x)'' + u_2(x)'y_{h2}(x)'' + \ldots + u_n(x)'y_{hn}(x)'' &= 0\\
&\ldots\\
u_1(x)'y_{h1}(x)^{(n-1)} + u_2(x)'y_{h2}(x)^{(n-1)} + \ldots + u_n(x)'y_{hn}(x)^{(n-1)} &= g(x)
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden nun jeweils aufgelöst, bis man $u_i(x)$ erhält. Um zu $u_i(x)$ zu gelangen, muss auf dem Weg einmal die Gleichung auf beiden Seiten integriert werden. Hat man alle $u_i(x)$, so setzt man diese in unsere ursprüngliche y_p Gleichung ein.

Nun kann die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL berechnet werden. Dazu summiert man y_h und y_p: $y = y_h + y_p$. Dies ist die allgemeine Lösung. Hat man konkrete Punkte, an denen die Funktion ausgewertet wurde, so kann man die Unbekannten C_i berechnen.

Beispiel

Es soll $y'' + y = \frac{2}{\cos(x)}$ ausgerechnet werden.

Zuerst sehen wir uns das homogene DGL an:

$$\begin{aligned}
&y'' + y = 0\\
\Rightarrow\ &\lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0\\
\Leftrightarrow\ &e^{\lambda x}(\lambda^2 + 1) = 0\\
\Rightarrow\ &\lambda^2 + 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\lambda^2 = -1 \quad \Rightarrow \underline{\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i}
\end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung des homogenen DGL:

$$\begin{aligned}
y_h &= C_1 \cdot e^{ix} + C_2 \cdot e^{-ix}\\
&= C_1(\cos(x) + i\sin(x)) + C_2(\cos(x) - i\sin(x))\\
&= \sin(x)\underbrace{(iC_1 + iC_2)}_{=D_1} + \cos(x)\underbrace{(C_1 + C_2)}_{=D_2}\\
&= \underline{D_1\sin(x) + D_2\cos(x) = y_h}
\end{aligned}$$

Da es sich um ein inhomogenes DGL handelt, berechnen wir als nächstes die partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned}
y_p &= \underbrace{u_1(x)}_{D_1 \text{ in } y_h}\sin(x) + \underbrace{u_2(x)}_{D_2 \text{ in } y_h}\cos(x)\\
&\Rightarrow \left|\begin{array}{l} u_1(x)'\sin(x) + u_2(x)'\cos(x) = 0\\ u_1(x)'\sin(x)' + u_2(x)'\cos(x)' = \dfrac{2}{\cos(x)}\end{array}\right|\\
&= \ldots\\
&\Rightarrow u_1(x)' = -2\tan(x),\ u_2(x)' = 2\\
&\Leftrightarrow u_1(x) = 2\ln(\cos(x)),\ u_2(x) = 2x\\
&\Rightarrow \underline{y_p = 2\ln(\cos(x))\sin(x) + 2x\cos(x)}
\end{aligned}$$

Da wir nun auch die partikuläre Lösung haben, können wir die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL berechnen: $\underline{\underline{y = y_h + y_p = D_1\sin(x) + D_2\cos(x) + 2\ln(\cos(x))\sin(x) + 2x\cos(x)}}$

15.3 Ansätze für partikuläre Lösung

Hinweis: nur brauchbar für lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Bezeichnungen:

$P(x)$	charakt. Polynom der DGL
$S_k(x)$	polynomielle Störfunktion, Grad k
A, B	unbekannte Konstanten
$R_k(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$	mit unbekannten Koeffizienten

$g(x)$	*Ansatz*
ce^{mx}	Ae^{mx} , falls $P(m) \neq 0$ $Ax^q e^{mx}$, falls m q-fache NST von P
$S_k(x)$	$R_k(x)$, falls $P(0) \neq 0$ $x^q R_k(x)$, falls 0 q-fache NST von P
$P_k(x)e^{mx}$	$R_k(x)e^{mx}$, falls $P(m) \neq 0$ $x^q R_k(x)e^{mx}$, falls m q-fache NST von P
$\sin wx, \cos wx$	$A\cos wx + B\sin wx$, falls $P(\pm iw) \neq 0$ $x^q(A\cos wx + B\sin wx)$, falls $\pm iw$ q-fache NST von P
$\sinh wx, \cosh wx$	$A\cosh wx + B\sinh wx$, falls $P(w) \neq 0$ $x^q(A\cosh wx + B\sinh wx)$, falls w q-fache NST von P

16 Kurvenintegral (Linienintegral)

In den Übungen sind nur immer Integrale der zweiten Art vorgekommen.

16.1 2. Art

Das Wegintegral über ein stetiges Vektorfeld $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\int_\gamma \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} := \int_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle dt$$

Skalarprodukt: $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_x b_x + a_y b_y + \ldots$

Beispiel

Berechne des Linienintegral $\int_\gamma \vec{K}d\vec{x}$ für $\vec{K}(x, y) = (x^2 + y, 2xy)$ und γ als Einheitskreis mit positivem Umlaufsinn. Gegeben:

$$\begin{aligned}
\vec{K}(x, y) &= (x^2 + y, 2xy)\\
\gamma &: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\\
\gamma &: t \mapsto (\cos(t), \sin(t))
\end{aligned}$$

Zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\gamma(t)' &= (-\sin(t), \cos(t))\\
\vec{K}(\gamma(t)) &= (\cos^2(t) + \sin(t), 2\cos(t)\sin(t))\\
\left\langle \vec{K}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle &= -\cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t) + 2\cos^2(t)\sin(t)\\
&= \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t)\\
\int_\gamma \vec{K}d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{K}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle dt\\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin(t) - \sin^2(t)dt\\
&= -\frac{1}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{2}t + \sin(t)\cos(t)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\pi}}
\end{aligned}$$

16.2 1. Art

Das Wegintegral einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entlang eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma(t)'\|_2 dt$$

Euklidische Norm: $\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \ldots}$. Achtung: Beim Integral muss man zuerst $\gamma(t)$ nach t ableiten und erst dann die Norm davon berechnen!

Beispiel

Es sei die Schraubenlinie (Spirale in 3D)

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$$

und $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$ gegeben. Wir berechnen $\int_\gamma f ds$. Zunächst bestimmen wir

$$\|\gamma(t)'\|_2 = \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\sin t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+1} = \sqrt{2}$$

Dann substituieren wir x,y und z und erhalten

$$f(x,y,z) \overset{x=\gamma(t)}{=} f(\gamma(t)) = \sin^2(t)+\cos^2(t)+t^2 = 1+t^2$$

auf γ. Das führt zu

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds = \int_0^{2\pi}(1+t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}(t+\frac{t^3}{3})\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3+4\pi^2)$$

16.3 Parametrisierung von Kurven

Grundlegender Tipp: Skizze machen, um Grenzen und Kurve besser zu verstehen und schneller auf die Parametrisierung zu kommen.

- Wenn die Kurve in der Form
$$C = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n | \vec{r} = \gamma(t), a \le t \le b\}$$
bereits gegeben, so ist klar, dass $\gamma(t)$ der Weg ist und das Integral von a nach b verläuft.
- Die Paramtrisierung einer Strecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$: $\gamma(t) = \vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}), \quad 0 \le t \le 1$
- Die Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r ist: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cos(t) \\ y_0 + r\sin(t) \end{pmatrix}$. Für einen vollen Kreis gilt $0 \le t \le 2\pi$, für Kreisteile schränkt man diesen Intervall entsprechend ein.
- Parametrisierung eines Graphen der Funktion $f(x)$ für x zwischen a und b: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad a \le t \le b$. Achtung: Hat man zwei Graphen, die als Grenzen für das Kurvenintegral fungieren, so schliessen diese gemeinsam eine Fläche ein. Die Umlaufrichtung ist so zu wählen, dass diese Fläche jeweils links liegt.

16.3.1 Beispiel: Kurvenintegral mit zwei Grenzgraphen

Es soll das Kurvenintegral $\int_\gamma K(x,y)\ dt = \int_\gamma \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2y-x \end{pmatrix} dt$ berechnet werden. γ ist der Rand des beschränkten Gebietes im ersten Quadranten, welches durch die Graphen $y=x^2$ und $y=x^3$ begrenzt wird.

Lösung: Man macht eine Skizze der Grenzen ($y=x^2$ und $y=x^3$) und sieht, dass diese eine Fläche einschliessen. Die Schnittpunkte sind $x=0$ und $x=1$. Der Rand dieses Gebiets besteht also aus den beiden parametrisierten Kurven (Parametrisierung für Graphen verwenden)

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$
$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

Wir sehen, dass die eingeschlossene Fläche in Durchlaufrichtung von γ_1 links liegt, was soweit gut ist. Bei γ_2 liegt die Fläche aber auf der rechten Seite, weshalb wir die Durchlaufrichtung drehen müssen, was zu $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ führt (man beachte das Minus statt einem Plus).

Jetzt muss nur noch ganz normal das Wegintegral berechnet werden: $\int_\gamma K\ dx = \int_{\gamma_1} K\ dx + \int_{-\gamma_2} K\ dx = \int_{\gamma_1} K\ dx - \int_{\gamma_2} K\ dx = \ldots$

16.4 Berechnung

Die Berechnung findet in drei Schritten statt:

1. Parametrisierung der Kurve C als $C = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n | \vec{r} = \gamma(t), a \le t \le b\}$
2. Einsetzen ins Integral: $\int_C f(\vec{r})\ ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma(t)'\|\ dt$. Man setzt also für die Variabeln von f die Komponenten von γ ein und multipliziert dies dann mit dem Betrag der Ableitung nach t von γ.
3. Integral ausrechnen.

16.5 Bogenlänge

Für die Bogenlänge L, auf dem Weg beschrieben durch $x(t)$ und $y(t)$, ergibt sich:

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$$

17 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Hier geht es um Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $m=1$ gelten kann ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$). Solche Funktionen haben die allgemeine Form: $f(x) = f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \\ \ldots \\ f_m(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) \end{pmatrix}$

Für nahezu alle Eigenschaften gilt: Die Vektorfunktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hat eine bestimmte Eigenschaft, wenn jede einzelne ihrer Komponenten $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ die besagte Eigenschaft besitzen. Das Problem liegt neu also nicht im Wertebereich, sondern vor allem in Definitionsbereich.

17.1 Norm

Eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist die Funktion $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \ge 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
- $\forall x,y \in \mathbb{R}^n : \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

17.2 Partielle Differenzierbarkeit

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist in $a = (a_1, \ldots, a_n)$ partiell differenzierbar nach der i-ten Variable x_i, wenn die Funktion $f: x_i \to f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ differnzierbar ist. Man berechnet die partielle Ableitung also folgendermassen: Eine Funktion f wird nach einer Variable partiell differenziert, indem man alle anderen Variablen als Konstanten behandelt und die Rechenregeln für Funktionen mit einer Variable anwendet.

Satz 17.1 (Satz von Schwarz). Ist f nach x und y zweimal partiell differenzierbar und sind die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stetig, so gilt: $f_{xy} = f_{yx}$.

18 Vektoranalysis

Definition 18.1 (Vektorfeld). Die Abbildung $\vec{v}(\vec{r}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld. Es weist jedem Vektor $\vec{r}$ einen Vektor $\vec{v}(\vec{r})$ zu.

Definition 18.2 (Skalarfeld). Ist eine Abbildung der Form $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Es existiert wenn das Vektorfeld wirbelfrei/konservativ ist. Ergibt ein geschlossener Weg im Vektorfeld nicht null so existiert kein skalares Feld (jedoch nicht umbedingt umgekehrt).

Definition 18.3 (Gradient). Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Skalarfeld), so ist der Gradient von f der Vektor $\vec{v} = \operatorname{grad} f = \nabla f$. (Im Fall $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $\operatorname{grad} f = \nabla(f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.) Der Gradient ∇f von einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschreibt die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs des Graphen von f.

Definition 18.4 (Potential). Ist $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ der Gradient von f, so ist f das Potential oder Stammfunktion zu $\vec{v}$. Existiert wenn $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$ und der Definitionsbereich zusamenhängend ist.

Definition 18.5 (Gradientenfeld / Potentialfeld). Ist $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ der Gradient von f, so ist das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Gradientenfeld / Potentialfeld. Es besitzt dabei die folgenden Eigenschaften:

- Der Wert des Kurvenintegrals entlang eines beliebigen Weges innerhalb des Feldes ist unabhängig vom Weg selbst, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt
- Ein Kurvenintegral mit einem Weg bei dem Anfangs- und Endpunkt der gleiche Punkt sind, hat den Wert 0.
- Ist immer wirbelfrei: $\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$

Definition 18.6 (Rotor / Rotation). Ist $\vec{v}$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, so ist die Rotation von $\vec{v} = (P, Q, R)^T$ das Vektorfeld $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{pmatrix}$

Definition 18.7 (Vektorpotential). Ein Vektorfeld $\vec{v}$ heisst Vektorpotential zu $\vec{w}$, falls $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$.

Definition 18.8 (Wirbelfrei / konservativ). Ist $\vec{v}$ ein Vektorfeld mit $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, so nennt man $\vec{v}$ wirbelfrei. Auch: Das Vektorfeld ist *konservativ*.

Definition 18.9 (Divergenz). Die Divergenz eines Vektorfelds $\operatorname{div} \vec{K}(x, y, z)$ ist definiert durch: $\operatorname{div} \vec{K}(x, y, z) := \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}$

Lemma 18.1 (Geschlossener Weg). *Wenn $F = \operatorname{grad} \varphi$, respektive $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ und der Definitionsbereich zusammenhängend ist, sowie γ geschlossen ist, so folgt $\int_\gamma F = 0$.*

18.1 Bestimmung eines Potentials im $\mathbb{R}^2$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$.

Um schnell zu prüfen, ob man überhaupt den folgenden Algorithmus anwenden muss, kann man prüfen ob gilt: $P_y = Q_x$, wenn nicht, so hat $\vec{v}$ kein Potential f.

1. $f(x,y) = \int P(x,y)\, dx + C(y)$ berechnen (Integral berechnen)
2. Die berechnete Gleichung $f(x,y)$ nun nach y ableiten: $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)\, dx + C'(y)$ (berechnetes Integral nach y ableiten)
3. $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = Q(x,y)$ setzen und $C'(y)$ berechnen durch umformen und integrieren
4. Berechnetes $C(y)$ in die Gleichung im 1. Punkt einsetzen. Fertig. Achtung: Im Grunde hat $C(y)$ durch integrieren (aufleiten) noch einen konstanten Wert, der beliebigen Wert haben kann. Dieser taucht im Grunde auch in der fertigen $f(x,y)$ Funktion auf.

18.2 Bestimmung eines Potentials im $\mathbb{R}^3$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$.

Um zu prüfen, ob man überhaupt ein Potential finden kann für $\vec{v}$ hat $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ zu sein, also wirbelfrei zu sein. Dazu muss gelten (zu zeigen mit $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$): $P_y = Q_x, P_z = R_x, Q_z = R_y$.

1. $f(x,y,z) = \int P(x,y,z)\, dx + C(y,z)$ lösen (Integral berechnen)
2. Nun die berechnete Gleichung $f(x,y,z)$ nach y ableiten $\Rightarrow$ $f_y(x,y,z)$.
3. Die abgeleitete Gleichung f_y mit $Q(x,y,z)$ gleichsetzen: $f_y(x,y,z) = Q(x,y,z)$ und damit $C_y(y,z)$ bestimmen.
4. Durch Integration von $C_y(y,z)$ nach y ($\int C_y(y,z)\, dy$) wird $C(y,z)$ bestimmt bis auf eine Konstante $D(z)$, die von z abhängt. $C(y,z)$ hat also die Form: $C(y,z) = \int C_y(y,z)\, dy + D(z)$.
5. Dieses $C(y,z)$ setzt man nun in die Gleichung $f(x,y,z)$ ein, die im 1. Punkt steht.
6. Nun wird die daraus erzeugte $f(x,y,z) = \int P(x,y,z)\, dx + C(y,z) = \int P(x,y,z)\, dx + \int C_y(y,z)\, dy + D(z)$ Gleichung nach z abgeleitet.
7. Durch Gleichsetzen von $f_z(x,y,z) = R(x,y,z)$ lässt sich $D_z(z)$ bestimmen.
8. $D_z(z)$ wird wiederrum durch Integration zu $D(z) = \int D_z(z)\, dz + c, \quad c \in \mathbb{R}$
9. Das berechnete $D(z)$ in die $f(x,y,z)$ Gleichung aus Punkt 6 einsetzen, fertig.

18.3 Geometrisches Verständniss

Sei B ein drei dimensionaler Körper (beschrieben durch Punkte in $\mathbb{R}^3$ mit der Funktion f) so sei ∇f senkrecht dazu.

Beispiel

Gib einen Vektoren der ein nach aussen gerichteter Normalenvektor (nicht notwendigerweise normiert) auf dem Rand des Ellipsoids ist

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix}$ ist gleich ∇f und steht somit senkrecht auf der Niveaufläche $f = 1$. Da er vom Ursprung weg orientiert ist, liefert er die richtige Antwort.

Der Vektor $\begin{pmatrix} yz(1/b^2 - 1/c^2) \\ xz(1/c^2 - 1/a^2) \\ xy(1/a^2 - 1/b^2) \end{pmatrix}$ ist tangential zum Rand ∂B

19 Formeltafel

19.1 Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

19.2 Binomialkoeffizient

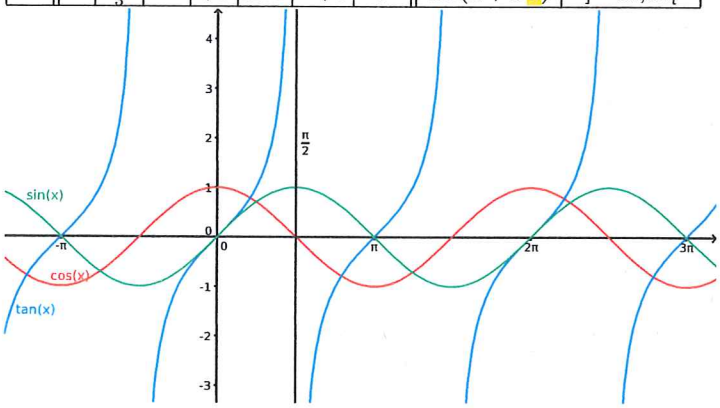
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{für} \quad 0 \le k \le n$$

19.3 Argument

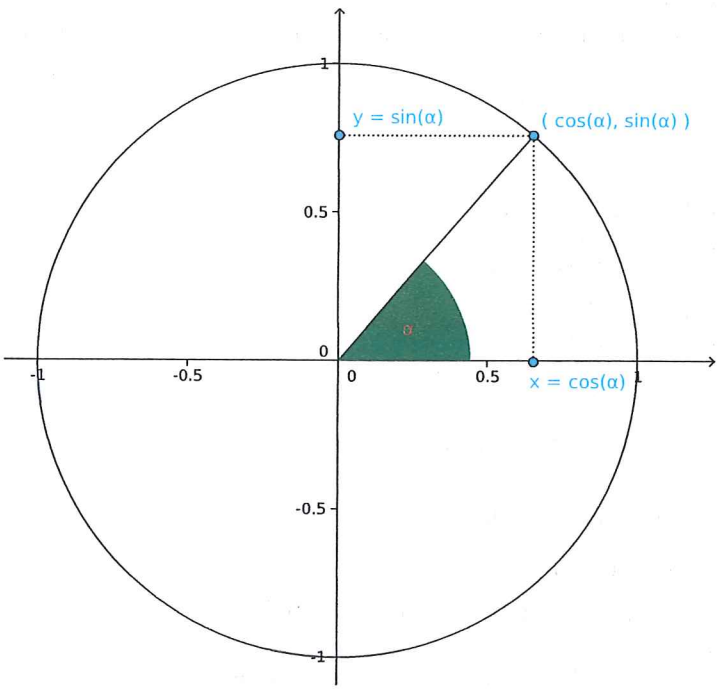
$$\arg(x, y) := \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x \ge 0 \\ -\arctan(\frac{y}{x}) & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y > 0 \end{cases}$$

19.4 Kreisfunktionen

α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$	$\frac{2\pi}{3}$ $120°$	π $180°$	Periode	Wertebereich
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$	$[-1, 1]$
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\tan(\alpha + k \cdot \pi)$	$]-\infty, \infty[$



19.4.1 Einheitskreis



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$$

19.5 Trigonometrische Funktionen & Additionstheorem

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$
- $\sin(90° \pm \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(180° \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$
- $\cos(90° \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$
- $\cos(180° \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

19.6 Hyperbelfunktionen

- $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i\sin(ix)$
- $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$
- Umformung: $\tanh(x) + 1 = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + 1 = \frac{2x - 1 + e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

19.7 Ableitungen

19.7.1 Regeln

- (Summenregel) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- (Produktregel) $(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- (Quotientenregel) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- (Kettenregel) $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

19.7.2 Ableitungs-Tafel

- $\frac{d}{dx}\, x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}\, \frac{1}{x^n} = -n\frac{1}{x^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx}\, \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $\frac{d}{dx}\, e^{\alpha x + \beta} = \alpha e^{\alpha x + \beta}$
- $\frac{d}{dx}\, e^{x^\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1} e^{x^\alpha}$
- $\frac{d}{dx}\, \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}\, \alpha^x = \alpha^x \ln(\alpha)$
- $\frac{d}{dx}\, x^x = x^x(1 + \ln(x))$
- $\frac{d}{dx}\, x^{x^\alpha} = x^{x^\alpha + \alpha - 1}(\alpha \log(x) + 1)$

- $\frac{d}{dx}\, \sin(x) = \cos(x)$; $\frac{d}{dx}\, \sin(\alpha x + \beta) = \alpha\cos(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\, \cos(x) = -\sin(x)$; $\frac{d}{dx}\, \cos(\alpha x + \beta) = -\alpha\sin(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\, \tan(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$; $\frac{d}{dx}\, \tan(\alpha x + \beta) = \alpha\frac{1}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx}\, \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\frac{d}{dx}\, \arcsin(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx}\, \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\frac{d}{dx}\, \arccos(\alpha x + \beta) = -\frac{\alpha}{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta)^2}}$
- $\frac{d}{dx}\, \arctan(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; $\frac{d}{dx}\, \arctan(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{(\alpha x + \beta)^2 + 1}$

- $\frac{d}{dx}\, \sinh(x) = \cosh(x)$; $\frac{d}{dx}\, \sinh(\alpha x + \beta) = \alpha\cosh(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\, \cosh(x) = \sinh(x)$; $\frac{d}{dx}\, \cosh(\alpha x + \beta) = \alpha\sinh(\alpha x + \beta)$
- $\frac{d}{dx}\, \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$; $\frac{d}{dx}\, \tanh(\alpha x + \beta) = \alpha\frac{1}{\cosh^2(\alpha x + \beta)}$
- $\frac{d}{dx}\, \operatorname{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; $\frac{d}{dx}\, \operatorname{arsinh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + 1}}$
- $\frac{d}{dx}\, \operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}\sqrt{x + 1}}$; $\frac{d}{dx}\, \operatorname{arcosh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha x + \beta - 1}\sqrt{\alpha x + \beta + 1}}$
- $\frac{d}{dx}\, \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{1 - x^2}$; $\frac{d}{dx}\, \operatorname{arctanh}(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{1 - (\alpha x + \beta)^2}$

19.8 Integrale

19.8.1 Integralregeln

Es gelte: $\int f(x)\,dx = F(x)$

- $\int u' \cdot v dx = uv - \int u \cdot v' dx$
- $\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt,\ x = g(t), dx = g'(t)dt$

- $\int f(a+x)\,dx = F(a+x)$
- $\int f(a-x)\,dx = -F(a-x)$
- $\int f(-x)\,dx = -F(-x)$
- $\int f(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x)$
- $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|$
- $\int g(x)g'(x)\,dx = \frac{1}{2}g(x)^2$

- $|\int f(x)| \leq \int |f(x)|$ (wenn f, Riemann-Integrable ist)

19.8.2 typische Integrale

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$
- $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}$
- $\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a|$
- $\int \ln(x)\,dx = x(\ln(x)-1)$
- $\int \ln(ax+b)\,dx = \frac{(ax+b)\ln(ax+b)-ax}{a}$
- $\int \frac{1}{(x+a)^2}\,dx = -\frac{1}{x+a}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$
- $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|$
- $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}, (n \neq -1)$
- $\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
- $\int \frac{ax+b}{px+q}\,dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2}\ln|pq+q|$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$
- $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
- $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sin(x)}\right)$
- $\int a^{xb+c}\,dx = \frac{a^{bx+c}}{b\log(a)}$

19.8.3 trionometrische Funktionen

- $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$
- $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$
- $\int \sin(ax)^2\,dx = \frac{x}{2} - \frac{sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x$
- $\int x\sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x$
- $\int \cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin(ax)\cos(ax)\,dx = -\frac{\cos^2(ax)}{2a}$
- $\int \tan(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)|$
- $\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
- $\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{(1-x^2)}$
- $\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

19.8.4 Hyperbelfunktionen

- $\int \sinh(ax+b)\,dx = \frac{\cosh(ax+b)}{a}$; $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$
- $\int \cosh(ax+b)\,dx = \frac{\sinh(ax+b)}{a}$; $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$
- $\int \tan(ax+b)\,dx = \frac{\log(\cosh(ax+b))}{a}$; $\int \tan(x)\,dx = \log(\cosh(x))$

19.8.5 Exponentialfunktion

- $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$
- $\int xe^{ax}\,dx = e^{ax}\cdot\left(\frac{ax-1}{a^2}\right)$
- $\int x\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln(x) - \frac{1}{2})$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{a}x^2}\,dx = \sqrt{a\pi}$

19.9 Reihenentwicklung

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \cdots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \cdots$
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $\ln x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}$

19.10 Grenzwerte

- **Bernoullische Ungleichung**: $x \geq -1, n \in \mathbb{N}:\ (1+x)^n \geq 1+nx$
- **Vergleich von Folgen**: weiter rechts stehende Folgen streben schneller gegen ∞ als die links davon stehenden: $1,\ \ln n,\ n^\alpha(\alpha > 0),\ q^n(q > 1),\ n!,\ n^n \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$

$\lim_{n\to\infty}$

- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} \to 1$
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \to 1$
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \to \frac{1}{e^x}$
- $\lim_{n\to\infty}\binom{a}{n} \to 0,\ a > -1$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} \to 0$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} \to \infty$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k} \to \infty, a > 1, k$ fest
- $\lim_{n\to\infty}a^n n^k \to 0, |a| < 1, k$ fest
- $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1) \to \ln a, a > 0$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty}n^p q^n = 0 \qquad p \in \mathbb{N}$ und $0 < q < 1$
- $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x} - x = \frac{1}{2}$
  (Lösungsansatz mit Taylorreihe ($\sqrt{1-x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$): $\sqrt{x^2-x} - x = x(\sqrt{1-\frac{1}{x}} - 1) = x((1 + \frac{1}{2x} + O(\frac{1}{x^2})) - 1) = \frac{1}{2} + O(\frac{1}{x}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$)

$\lim_{x\to 0}$

- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x\to 0}x^a\ln x = 0,\ a > 0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x\to 0}x^\alpha\ln x = 0 \qquad \alpha > 0$

19.11 Reihen

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert ("harmonische Reihe")
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \ln\frac{1}{2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$, divergiert für $\alpha \leq 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty}q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ ("geometrische Reihe")

- $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ ("geometrische Reihe")
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

- $\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$
- $\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$
- $\sum_{n=0}^{m} n^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$
- $\sum_{n=0}^{m} n^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2$

19.12 Linienintegral

- 2. Art: $\int_\gamma \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} := \int_a^b \left\langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma(t)' \right\rangle \, dt$
- 1. Art: $\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma(t)'\|_2 \, dt$

19.13 Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

19.14 Exponent

- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$

19.15 Wurzel

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

19.16 Ungleichungen

- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ und $a - c < b - c$
- $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- Dreiecksungleichung für reelle Zahlen: $|a + b| \leq |a| + |b|$
- Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

19.17 Logarithmen

- $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\log_a(x + y) = \log_a x + log_a(1 + \frac{y}{x})$
- $\log_a(x - y) = \log_a x + \log_a(1 - \frac{y}{x})$

19.18 Exponentialfunktion

- $e^{-\inf} = 0$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e = 2.718281828$
- $e^{\inf} = \inf$
- $e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$ (Euler Identität)
- $e^{b\ln(a)} = a^b$
- $e^{-\ln(b)} = \frac{1}{b}$

19.19 Komplexe Zahlen

- $z \in \mathbb{C} : z = a + b \cdot i$
- $\bar{z} = a - b \cdot i$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$
- $i^2 = -1$
- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

19.20 Geometrische Körper

19.20.1 Ellipsoid

Hat die Form eines Rugbyballs. In kartesischen Koordinaten definert durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

19.21 Geometrie in 3D

Masse von speziellen Gebieten

Zylinder	$V = \pi r^2 h$	Torus	$V = 2\pi^2 Rr^2$
Pyramide	$V = \frac{1}{3}Gh$		$S = 4\pi^2 Rr$
Ellipsoid	$V = \frac{4\pi}{3}abc$	Kugel	$V = \frac{4\pi}{3}r^3$
Kegel	$V = \frac{\pi}{3}r^2 h$		$S = 4\pi r^2$
Kegelstumpf	$V = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$		

Rotationskörper

Rotation um die x Achse $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.
Rotation um die y Achse $V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$.

19.22 Ausklammern

- $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
- $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$

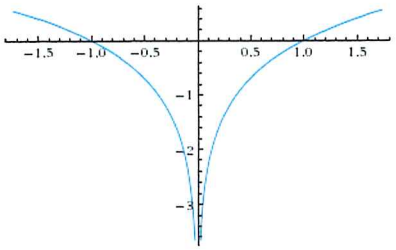
19.23 Aus Serien

- Ableitung von x^x kann man berechnen, indem man $x = e^{\log(x)}$ setzt. Also in diesem Fall $e^{\log(x^x)} = e^{x\log(x)}$ ableitet, was $e^{x\log(x)}(1 + \log(x))$ (Serie 10)
- Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$
- Euler Identität (komplexe Zahlen): $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
- arctan Identität: $\arctan(\frac{1}{x}) + \arctan(x) = \text{sgn}(x)\frac{\pi}{2}, \quad x \neq 0$
- $\text{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

lista di poi da includere

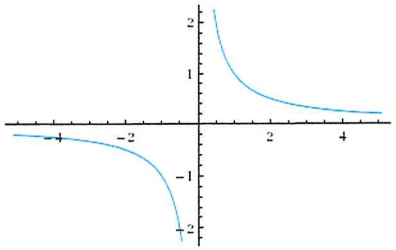
- p18 num. complessi
- altri p27-28

19.24 $\log(x)$



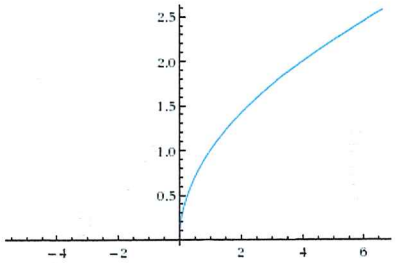
x from −1.5 to 1.5

19.25 $\frac{1}{x}$



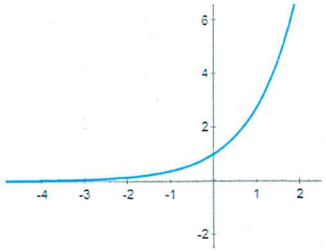
x from −4 to 4

19.26 $\sqrt{x}$

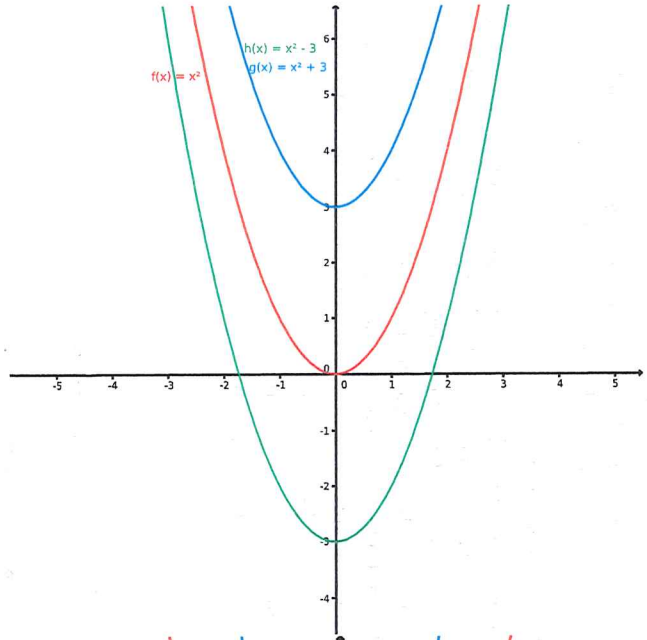


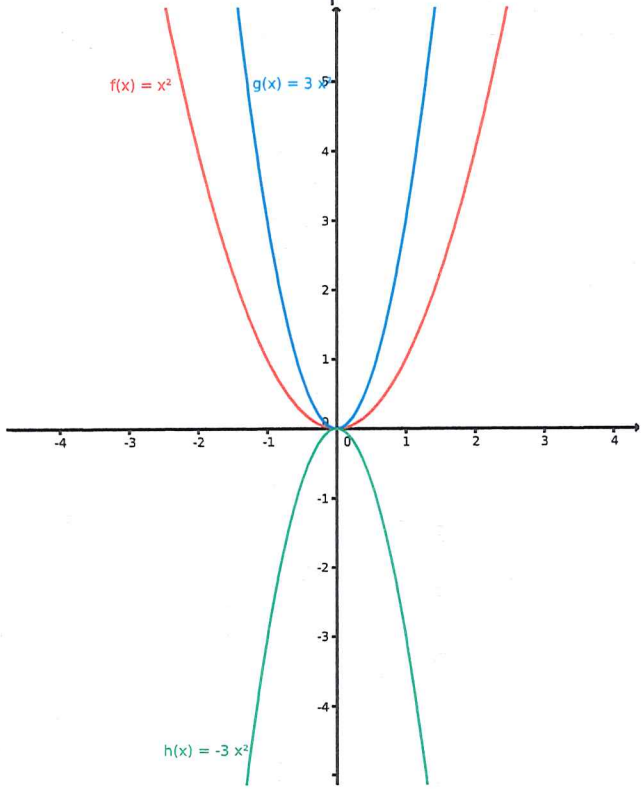
x from −4 to 6

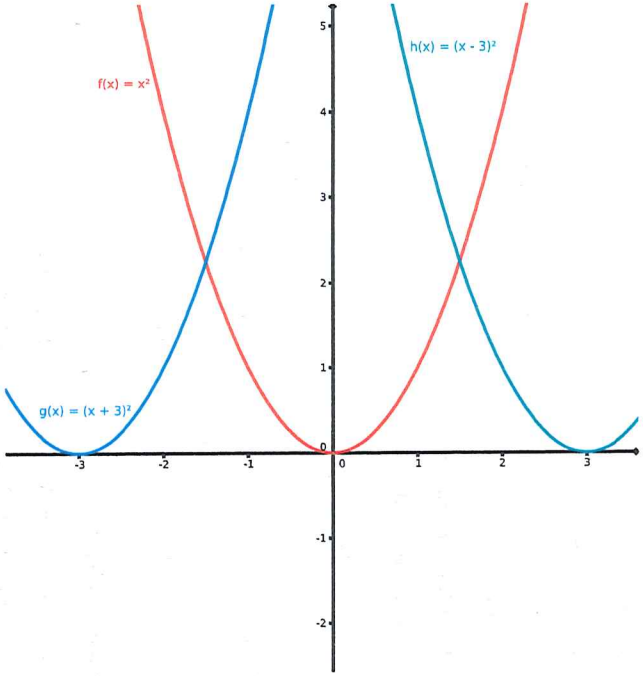
19.27 e^x



19.28 Funktionsmanipulation







19.29 Pascalsches Dreieck

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

20 Reihen Tabellen

	schnelles Fallen				langsames Fallen
wie schnell gehen die a_n gegen 0	exponentiell wie $q^n, \lvert q\rvert < 1$	polynominal wie $n^{-\alpha}, \alpha > 1$	höchstens wie $1/n$		gar nicht
Beispiele	$a_n = \frac{n^8}{2^n}$, $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n$	$a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{n^{100}}$, $a_n = \frac{1}{(n+\ln n)^2}$, $a_n = \frac{20}{n^2-33}$	$a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$a_n = \frac{1}{\ln n}$, $a_n = \frac{1}{n+\ln n}$, $a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = (-1)^n$, $a_n = \sin n$, $a_n = n^2$
passende Konvergenzkriterien	Wurzel- und Quotientenkriterium	Integral- und Verdichtungskriterium (entsprechende Summe)	Leibniz-Kriterium		$a_n \not\to 0$
Vergleichs-, Majoranten-, Minorantenkriterium	Vergleichen mit q^n	Vergleichen mit $n^{-\alpha}$	kein Vergleich möglich	Vergleichen mit $\frac{1}{n}$	
Konvergenz-verhalten	absolute Konvergenz		keine absolute Konvergenz (einfach Konvergenz)	Divergenz	

direkte Kriterien	
Quotientenkriterium	Gut für Reihen, die Fakultäten oder Glieder der Form a^n enthalten. Nicht auf Reihen anwendbar, in denen die Glieder nur wie eine Potenz von n fallen.
Wurzelkriterium	Gut in Reihen, deren Glieder ($\sqrt[n]{\text{Member}}$) n-te Potenzen sind, zusammen mit der Stirlingformel oft auch bei Fakultäten anwendbar.
Leibnizkriterium	Nur für alternierende Reihen.
Integralkriterium	Anwendbar auf monotone Reihen.
direkte Kriterien	
Vergleichskriterium	Ermöglicht es „Störterme“ wegzulassen und so einfachere Reihen zu untersuchen
Verdichtungskriterium	Bei monotonen Reihen anwendbar. Für Reihen mit langsam fallenden Gliedern
Majoranten- und Minorantenkriterium	Ähnlich wie Vergleichskriterium. Wird mit einer Reihe verglichen, deren Glieder stets kleiner oder grösser sind.